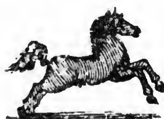
DISCORSO STORICO RAGIONATO SULLE LEZIONI ALLA...

Agatino San Martino







DISCORSO

STORICO RAGIONATO

SULLE

LEZIONI ALLA CATTEDRA

DI

MATEMATICA SUBLIME

DELLA

R. UNIVERSITA' DI CATANIA

NEI LORO RAPPORTI COI PROGRESSI

DELLA SCIENZA

DI

AGATINO SANMARTINO



CATANIA

TIPOGRAFIA DEI FRATELLI SCIUTO

1844.

Estratto dal Giornale del Gabinetto Letterario dell'Accademia Gioenia T. IX, Bim. III-VI.

INTRODUZIONE

Chiamato con Real Dispaccio nel 1816 alla Cattedra di Matematica Sublime di questa Regia Università, io mi feci immantinente a pubblicare uno scritto sotto il titolo di *Introduzione allo studio della Matematica Sublime*, in cui della filosofia ho trattato della scienza che dovea insegnarvi. Questo scritto vergato percosiddire estemporaneamente è diviso in quattro articoli. Nel primo dell' origine filosofica ho parlato delle matematiche in genere. Nel secondo il soggetto peculiare ho discusso di quella parte di esse che si dice sublime. Dell'essere essenziale di questa parte sublime nel terzo ho discorso. Nel quarto infine del sistema di lezioni ho trattato alla sua istruzione vocale competente. Queste basi stabilite, son venuto quindi realizzando e renderne al fatto il concepito sistema di lezioni. Ne ho prodotto al pubblico nel 1820 il primo volume: immediatamente dopo nel 1821 il secondo: e dopo l' interruzione di più anni da varie contigenze causata il terzo e il quarto nel 1830 e 1832. Le replicate inchieste onde porgere qualche articolo a questo Giornale Gioenio, vennero a provocarmi l' idea di darvi i passi della scienza seguendo, un riassunto ragionato di queste lezioni che poteva loro servire di conchiusione finale; conchiusione utile sempre alle medesime, mettendone con ordine e ragione sottocchio il contenuto. Io l' ho fatto dunque in maniera da presentare un discorso generale dirò così sulla scienza del calcolo su-

blime, segnare indirettamente lo stato essenziale de' suoi progressi in quest' ultimo ventennio, far sentire le teoriche trascendenti che vi sono trattate: l' ho fatto dico senza punto pronunziare sul loro merito scientifico assoluto e relativo; ma solo richiamandone presenti le materie, rimarcandone il più a minuto che ad un lavoro di questa fatta conviene il corso delle dottrine, ed il dritto interamente lasciandone al saggio leggitore di giudicarne. Intanto nella predetta *Introduzione* sulle traccie camminando della nuda ragione e sull' autorità del fatto appoggiandomi, ho io conchiuso l' essere di un corso completo di studio sulla scienza non ridursi che a quattordici lezioni, delle quali le prime sette ho veduto in corrispondente e individuale contrapposto colle altre sette. Quindi a formarne son venuto delle prime sette il soggetto del primo tomo; e delle altre sette quello del secondo, il quale ho in seguito diviso in due, versante l' uno sulle prime quattro, e l' altro sulle ultime tre: quest' ultimo ho quindi ancora diviso in due parti formandone due distinti volumi, de' quali il primo ha per oggetto le prime due di coteste tre lezioni e il secondo la terza ed ultima. Ond' è che l' opera progettata di due tomi, venne a risultare nel fatto divisa in tre tomi, e in ultima suddivisione in quattro volumi. Io dunque il cammino di questa distribuzione seguendo, verrò a dividerne il discorso proposto in quattro articoli: sarà il primo un rendiconto del primo volume sul calcolo diretto: verserà il secondo sulla metodologia inversa, soggetto del secondo volume: terrà ragione il terzo dei due primi usi alge-

brici ed aritmetici di essa, compresi nel terzo volume: e finalmente il quarto che la terza ed ultima lezione del calcolo inverso sugl'usi geometrici ha per argomento avrà per oggetto il quarto ed ultimo volume.

PRIMO VOLUME

La variabilità è il carattere essenziale di quell' attributo generale dei corpi che dicesi quantità; e la misura della quantità il soggetto generico forma delle matematiche. La matematica cosiddetta elementare non eseguisce questa misura che nell' astrazione di cotesto carattere: l' introduzione all'analisi non ne tiene conto che *a posteriori*: nel mentre che la matematica sublime ne discorre *a priori*, e non ne usa che poggiando sul fatto esplicito di esso. Fissate queste idee nella predetta mia *Introduzione* venni io tanto *a priori* uso facendo della semplice e nuda ragione, quanto *a posteriori* sul fatto ragionando de' geometri, a raccoglierne pel soggetto assoluto e peculiare delle mie lezioni la definizione colle frasi significata di *analisi delle funzioni a quantità variabili a variabilità esplicita*. E' con questa definizione che incomincia il primo volume: ed è come in una specie d'introduzione dell'intero corso che ivi se ne conduce l'analisi ragionata, e che vi si dà un'idea esatta e filosofica della scienza. Quindi avanzandomi a fissarne le nozioni fondamentali sotto il titolo di *Nozioni preliminari sulle quantità variabili e le funzioni* che la materia prima percosiddire ne formano,

vengo alla metodologia diretta e sue applicazioni agli usi corrispondenti di essa, argomento del primo volume in parola.

Date delle quantità trovarne delle altre non date ed incognite: questo è il problema generale che si propone di risolvere la matematica. Posto ciò si viene nella prima lezione ad assumere il caso più semplice di questo problema, quello dico che non esibisce per la sua soluzione che un'equazione binovariabile a variabili separate, cioè una funzione esplicita a due variabili; funzione che presa indeterminatamente vi si determina sul fatto poggiando della variabilità, come era di condizione nel presente ramo di analisi. Questo fatto non si annunzia primitivamente che per addizione. Quiudi supposto un aumento indeterminato nella variabile onde la funzione dipende, se ne viene dietro a Lagrange rapportando la rappresentanza analitica sotto espressione indefinita: rappresentanza di cui non vi si rende quivi ragione, ma sol se ne promette alla fine dell'opera la dimostrazione, come s'è effettivamente praticato in un'Appendice: rappresentanza però di cui non si è mancato di stabilirne ivi l'essere analitico; rimarcarne i casi eccettuali a' quali va soggetta; notarne il caso in particolare, che forma il cosiddetto teorema di Maclaurin; l'espressione tradurne con una metafisica sì pronta che semplice nelle frasi del calcolo differenziale; ed averne quella infine che sotto il nome si divisa di teorema di Taylor, principio e fondamento di questo calcolo.

Stabiliti così al rigore analitico i principj fondamentali della scienza, son venuto ad applicarli alla differenziazione delle funzioni di una variabile, che l'argomento erano dello attuale mio dire. Ho dunque a questo proposito riflettuto che una funzione analitica comunque composta non può essere che il risultato di altre funzioni prese e trattate come semplici ed elementari, e fra loro variamente combinate mediante gli algoritmi primitivi della scienza: quindi ho detto se si conosceranno le regole della differenziazione di cotesti algoritmi per le funzioni semplici ed elementari, è chiaro che si avranno nell'atto stesso tutti gli elementi onde comporne quella di qualunque funzione composta che un qualche problema potrebbe per la sua soluzione esibirci. Onde sopra di questa riflessione poggiando, riflessione di cui son tornato a giovarmi dopo venti e più anni nella mia discussione del teorema di D'Alembert sulle quantità immaginarie, io son venuto a dividere in due parti l'argomento. Nella prima uso facendo de' principj generali già stabiliti, ho dato la differenziazione de' tre algoritmi fondamentali addizione moltiplicazione graduazione delle funzioni prese come semplici, ed in quest'ultima in particolare con dei metodi semplici e proprj quella delle funzioni potenze, esponenziali, logaritmiche e circolari, che formano percosiddire dell'allocuzione algebrica l'alfabeto; e nella seconda mi son fatto ad esemplificare con delle funzioni di speciale composizione le regole nella prima parte conchiuse, e con questa esemplificazione la prima a conchiudere delle lezioni,

Discussa la differenziazione fondamentale delle funzioni unovariabili dietro a' principj esatti e rigorosi di Lagrange, principj checchè ne dicano i promotori degl' infinitesimi e de' limiti esclusivamente competenti al presente caso in cui d' istruzione si tratta, d' insegnamento, si viene alla seconda lezione sulle funzioni multovariabili. Qui facendo rimarcare come questo genere di differenziazione può da quella della precedente lezione ripetersi, si è fatto sentire il bisogno assoluto di segni proprj e speciali per significare i coefficienti differenziali parziali a cui essa conduce. E passando in rivista quelli che usati si erano finallora, uno mio proprio ne ho richiamato, e che nel 1814 avea proposto nel mio *Opuscolo sul nuovo algoritmo del calcolo differenziale;* segno che alla chiarezza della significazione la semplicità unisce della notazione, raccomandato nel volume del 1831 degli Annali scientifici del regno Lombardo-Veneto; e da me preso ad usare nelle lezioni promiscuamente e alla convenienza con quello di M. Fontaine, che nonostante il più disadatto è ordinariamente il più usato. Dopo queste considerazioni vengo immediatamente alla corrispondente differenziazione. Incominciando dal caso più semplice, dalle funzioni binovariabili, mi feci ad assegnarvi nella sopra indicata maniera la rappresentanza generale della funzione variata competente: e rimarcando che la derivazione de coefficienti l'uno dall'altro precedente contiguo avea luogo egualmente in questo caso, e che questa derivazione a quella delle funzioni ad

un maggior numero di variabili si estendea; venni col fatto di una esemplificazione a mostrare come nel caso particolare si conduce.

Frattanto qualunque funzione che contiene de' differenziali si dice funzione differenziale. Ma non tutte le cosiffatte funzioni significano qualche cosa di reale. Tutte quelle funzioni che non sono il risultato esatto della differenziazione, sono riputate come capricciose, insignificanti, arbitrarie. Data dunque una funzione differenziale giova molto il sapere se essa sia esatta o no; essendo di somma importanza nel calcolo inverso, nell' integrale, il conoscere prima di farsi all' integrazione di una proposta funzione saperne la possibilità. L'Eulero fu il primo a ridurre a delle formole generali le condizioni di esatta integrabilità per tutte le funzioni in genere. Ma egli non vi pervenne che per una via indiretta, deducendole dalla considerazione de' massimi e minimi. Condorcet quindi venne a darne una dimostrazione diretta: ma il suo metodo non conducea che sulla proposizione inversa epperò insufficiente, mentre la diretta era quella di cui principalmente si abbisognava. Lagrange finalmente diede un metodo diretto e generico che ne rende ragione con tutta la generalità e a sufficienza. Non entra ad interloquire il testo in questo volume sul metodo generale di questa dimostrazione: e solo promettendo di tenerne conto, come si è realmente fatto, nell' anzidetta Appendice, si conchiude la lezione, rendendo ragione di coteste condizioni per le funzioni soltanto di primo ordine a due e a tre variabili, onde non mancare l'articolo della dottrina

per quelle applicazioni alle quali doveasi nel corso delle lezioni venire.

Passandosi alla terza lezione che la differenziazione delle funzioni implicite ha per oggetto, si viene alla considerazione del caso più semplice di esse, delle equazioni dico a due variabili; considerazione da cui quella delle equazioni ad un maggior numero di variabili come una specie di corollario se ne deriva. Si richiama questo caso sopra di quello delle funzioni esplicite a due variabili nella seconda lezione discusso: e facendo rimarcare la differenza che essenzialmente passa tra l'essere dell'uno e dell'altro caso, vi si definiscono a vista direi le equazioni derivate o differenziali; si riducono queste equazioni all'espressione analitica lor propria e peculiare; e così ridotte si viene per illustrazione applicandole al caso speciale dell'equazione al circolo.

Tutte le combinazioni delle equazioni così prodotte che per distinzione ho detto *esatte*, danno delle altre equazioni differenziali che godono egualmente di un essere analitico. Intanto fra tutte cosiffatte combinazioni non vengono nell'attuale periodo considerate in generale nella scienza che quelle solamente che dalla eliminazione delle costanti arbitrarie derivano: anzi un'equazione differenziale qualunque essa sia, non si prende in generale nel calcolo inverso che sotto un siffatto punto di provenienza. Quindi son venuto a dimostrare la natura e l'essere delle equazioni così derivate; e ad illustrarle applicandole ad un esempio. Un'altra classe di equazioni differenziali risulta dalla differen-

ziazione delle equazioni a più di due variabili, che si dicono parziali, e che si dividono similmente in esatte e non esatte. Queste ultime qualunque ne sia la provenienza, sono riguardate in generale come il risultato della eliminazione delle costanti o delle funzioni arbitrarie contenute nella equazione primitiva. Onde si è venuto a discutere la natura e l'essere analitico di quest' altro ramo di equazioni derivate. Lagrange ha dato la teoria generale dell' uno e l' altro ramo di cosiffatte equazioni, teoria famosa e che ha portato un punto di vista generale e luminoso sulla dottrina dell' integrazione delle equazioni. E' dietro a questa teoria che io mi son condotto in presentarne la genesi analitica, e le conchiusioni a classificarne.

Pria di mettere termine a questa terza lezione io son venuto a rendere conto di una circostanza insigne che può aver luogo nella differenziazione delle equazioni: questa è quella della differenziazione a variazioni, che il Lagrange fu in origine a concepire, e che l'Eulero disse in seguito *calcolo delle variazioni*. Questo calcolo non si era trattato che come un corpo di dottrina distinto ed a se; non si espone che sotto un articolo separato e particolare. Ma esso non forma essenzialmente che un argomento parziale della teorica della differenziazione delle equazioni; e come tale non deve far parte che di questa teorica. Così ho io dunque proceduto: dopo averne fatto conoscere in questo luogo il principio fondamentale e l'essere analitico, son venuto la lezione a conchiudere dimostrando un teorema importante e fondamen-

tale che lo riguarda; e che le variazioni dei differenziali trasformando in differenziali delle variazioni, stabilisce un punto di riunione tra questo e il caso ordinario della predetta differenziazione.

Il principio della variabilità portato sul fatto delle applicazioni analitiche, presenta non solo alla nostra contemplazione l'esame di una funzione differenza isolatamente, ma colla ripetizione de' suoi atti quello ancora di una serie di funzioni siffatte; funzioni che godono la proprietà di derivarsi l'una dall'altra contigua in un modo lor proprio e costantemente uniforme, e che hanno delle relazioni fra di loro reciproche e speciali. Cotesto esame come nel primo caso genera il calcolo delle funzioni differenziali, così nel secondo il calcolo delle funzioni differenze. Questo calcolo forma il soggetto della quarta lezione di cui entriamo a rendere conto. Incominciando con esporne i principj analitici, son quindi venuto applicandoli alla dimostrazione del teorema fondamentale che la rappresentanza riguarda di una differenza di ordine indeterminato; teorema che prodotto sotto un'espressione indefinita, rapporta poi sotto quella definita data per la prima volta da Lagrange; e che dimostrata in seguito dal Laplace con maniere molto severe, ho io assegnato con un processo assai facile e pronto. Venendo quindi a stabilire le basi della differenziazione che a questo calcolo appartiene, tanto riguardo alle funzioni esplicite quanto alle implicite, ho chiuso la lezione, e con essa la intera discussione sulla metodologia in discor-

so. Son passato dappoi alla prima delle tre ultime lezioni che ne hanno gli usi per oggetto.

In questa lezione, la quinta del calcolo diretto in cui siamo, si viene esponendo quattro delle principali e più rimarchevoli ricerche che lo riguardano; lo sviluppo dico delle potenze de' polinomj, la valutazione delle funzioni che in certi valori particolari della variabile si presentano sotto l' aspetto indeterminato di zero diviso per zero, la scomposizione delle frazioni razionali nelle loro frazioni semplici e parziali, la dottrina de' massimi e minimi. Incominciando dalla prima, e seguendo il metodo che dietro al Fontana ha dato alla sua maniera il Lagrange nella sua teoria delle funzioni analitiche io venni a rappresentare i coefficienti dello sviluppo di cui si tratta, secondo una legge analitica semplice e manifesta, ma tale che uno qualunque di essi non andava espresso che in funzione di tutti i precedenti. Un espressione siffatta è chiaro che riuscir dovea incompleta e fastidiosa in usarne, convenendo che fosse prodotta in funzione soltanto di quelli del proposto polinomio, sola data del problema. Ma io non mi sono arrestato in questo luogo che a quella solamente, alla quale i prelodati scrittori erano arrivati; riservandomi di ritornare sopra di questo argomento nel terzo volume, e darne in continuazione la riduzione sotto quest' ultima forma.

Due metodi possono seguirsi per valutare le funzioni che si riducono alla frase indeterminata di zero diviso per zero: l' uno interamente generale fondato sullo sviluppo in genere delle funzioni; l'altro dal teorema di Tay-

lor dipendente, e perciò non del tutto generale, perchè soggetto alle eccezioni che per questo teorema hanno luogo. Per niente omettere di quanto a questa seconda ricerca compete io ne ho esposto con dettaglio l'uno e l'altro: ed illustrandoli rispettivamente con un esempio onde farne sentire la pratica, son passato alla terza questione.

Il metodo generale per trattarla dovuto a Giovanni Bernulli dipende dalla risoluzione algebrica dell'equazioni, e perciò non presenta in generale che un'utilità soltanto apparente, come M. Landry ha fatto notare in una Memoria letta nel 1834 all'Accademia Reale delle scienze, proponendo altra strada onde poterne utilmente conseguire l'intento. Ho presentato io questo metodo colla maggiore generalità e ragione: mi sono giovato del processo della differenziazione nella ricerca dei numeratori delle frazioni parziali in cui si tratta di scomporne la proposta, supponendone prima assegnati i denominatori: e il dire ne ho conchiuso colla applicazione delle formole generali così trovate alla scomposizione di una frazione speciale che ho percosiddire preparato al calcolo inverso per la competente integrazione.

La teorica finalmente de' massimi e minimi, ultimo de' quattro argomenti proposti, può aver per oggetto i massimi e minimi ordinarj, o delle variazioni: e l'uno e l'altro può abbracciare la parte meramente analitica e la geometrica. Non entro in questo volume che a parlarne elementarmente, tornandovi in generale per la parte analitica nel terzo volume e

nel quarto per la parte geometrica. Mi sono quivi ristretto al solo caso delle funzioni ad una variabile indipendente. Vi dispiego l'essere filosofico ed analitico della questione; e il principio fondamentale ne statuisco: il teorema generale dal quale son venuto a farla dipendere vi dimostro: le condizioni vi determino onde il caso del massimo da quello del minimo si distingue: le difficoltà produco che incontrar si potrebbero sull'applicazione delle conchiuse regole generali, e ve le risolvo: applico queste regole per le funzioni esplicite al caso delle implicite: quelle delle funzioni vi tratto relativamente alle variazioni: e mettendo tutti i casi considerati sottocchio con delle esemplificazioni, ne conchiudo il trattato elementare ma in se stesso completo che proposto mi aveva.

Venendo alla sesta lezione su gli usi aritmetici non vi discuto che i due argomenti i più fecondi di utilità nelle Matematiche pratiche, ove solo si procede per approssimazione: la valutazione dico e l'interpolazione delle serie.

La conoscenza dell'errore commesso nella valutazione di una serie tuttochè sommamente convergente, ha assai d'importanza: e il difetto di questa conoscenza dice Lagrange, è donde tutti i metodi di approssimazione riescono in geometria e in meccanica imperfetti e sovente pericolosi. Quindi vengo esponendo il famoso teorema lagrangiano onde si tiene conto dello errore commesso nel resto trascurato di una serie; e che dà sotto espressione definita e solo dipendente dal calcolo differenziale, tanto la formola di Taylor quanto quella di Maclaurin.

Applicando quest' ultima formola così ridotta alla rettificazione aritmetica del cerchio, passai al secondo argomento in cui il calcolo produssi di una formola d' interpolazione avente per oggetto le serie algebriche ed a differenze convergenti solamente, non facendomi a trattarne con tutta la generalità ed all' ingrande che nel terzo volume: quindi applicando questa formola all' interpolazione di un numero indeterminato di termini della serie de' quadrati de' numeri naturali e al calcolo di un logaritmo che non si trova fra quelli delle tavole ordinarie, son venuto alla settima ed ultima lezione sugli usi geometrici.

In questa lezione la teoria completa ho esposto della geometria a due dimensioni nei suoi rapporti col calcolo differenziale, riserbandomi di trattarne quella più trascendente a tre dimensioni come una specie d'introduzione nel quarto volume. Ho io principiato il piano delineando della discussione, che sull' analisi si basa delle equazioni a due variabili, e che sotto i due punti radicali di vista ho condotto, versante l'uno sul paragone delle curve, e l'altro sulle loro individuali proprietà: sotto il primo ho dato in breve una teoria sì completa che ragionata de' contatti, che ho applicato a' due casi speciali del contatto della linea retta e del cerchio con una curva, facendo in quello vedere il vero metodo delle tangenti, che ho esemplificato sul particolare delle curve di secondo ordine; ed in questi il circolo osculatore e la vera teoria delle evolute, che ho conchiuso alla Cicloide ordinaria applicandolo: quindi sotto il

secondo punto di vista la dottrina ho discusso degli assintoti, che sul caso ho piegato delle curve coniche e la teorica dei punti singolari; multipli dico, d' inflessione e di regresso, delle massime e minime ordinate, che convenevolmente ho illustrato con un esempio. Oltre di queste dottrine delle altre relative a questo secondo punto di vista ho esposto: le maniere ho dato onde rettificare e quadrare le curve piane, misurare le superficie e le solidità de' solidi dalla loro rivoluzione intorno al proprio asse generati. Sappiamo che comparsa nei volumi dell' Accademia di Berlino la dimostrazione *a priori* di Lagrange del teorema di Taylor, Arbogast venne tosto applicandola alla geometria e in una Memoria letta all' Accademia Reale delle scienze ma restata per allora inedita, diede de' nuovi metodi onde portare ad effetto coteste ricerche. Dietro a cosiffatti metodi sì eleganti che rigorosi, e che Lagrange quindi produsse dalla sua banda nella sua teoria delle funzioni analitiche, è donde si è incaminato. Vi ho dato con breve e misurato discorso analitico le funzioni elementari della rettificazione e della quadratura delle curve a due dimensioni; funzioni mercè le quali nel calcolo inverso se ne deducono col corrispondente metodo d' integrazione la lunghezza e la superficie: e di queste trovate funzioni giovandomi nella considerazione de' solidi di rivoluzione, quelle ne ho corrispondentemente dedotto per la quadratura della loro superficie e cubatura de' loro volumi.

Per rendere appieno completa la discus-

sione di quest' ultima lezione, recata a termine l'analisi geometrica delle equazioni binovariabili nel caso della differenziazione ordinaria, nel caso cioè che rappresentano delle relazioni costanti, son venuto a considerarle pure nell'altro caso della differenziazione delle variazioni, nell' ipotesi dico che delle relazioni variabili e indeterminate significano. A questo proposito fatta rimarcare la significazione geometrica del nuovo caso, venni applicandolo alla dottrina de' massimi e minimi: e senza venire ad ulteriore discussione, chiamando a linguaggio geometrico la funzione prodotta per esemplificazione meramente analitica nella quinta lezione, ho conchiuso la lezione e con essa tutta l'intera discussione sulla parte del calcolo diretto, che il soggetto formava del primo volume.

SECONDO VOLUME

Sulle prime quattro lezioni della metodologia inversa della matematica sublime versanti sull' integrazione delle funzioni differenziali ad una ed a più variabili delle equazioni differenziali e delle funzioni a differenze.

I metodi inversi presentano in generale delle difficoltà sempre maggiori dei diretti. Questa proposizione che il fatto semprepiù contesta e rende determinata, si applica tutta di seguito al caso in cui entriamo. Il calcolo integrale e delle retrodifferenze grandissime ne soffre e delle trascendenti direi relativamente al differenziale e a quello delle differenze. Manca esso ho rimarcato nell' Avvertimento a questo secondo tomo, di un metodo unico onde trattare in genere le varie e diverse specie di funzioni che ne fanno il soggetto. I suoi metodi varii e diversi ne sono; e la loro varietà e indole diversa vi cammina sempre in ragione della varia e diversa natura delle me-

desime. Quindi è che il secondo tomo riuscendo molto grande ed esteso in volume venne a suddividersi in due; e si venne a dare l'opera così divisa in tre. La natura della questione venne poi tutta da se presentando la partizione delle materie tra il secondo e il terzo tomo. L'integrazione e gli usi di essa erano i due oggetti a cui fondamentalmente mirava il calcolo in questione: quindi la teorica delle integrazioni ha formato l'argomento del secondo, e se ne sono riservati gli usi per farne quello del terzo.

Incomincia questo secondo volume con una introduzione ragionata. Vi si fissa dapprima l'idea che il vocabolo integrazione significa nell'attuale periodo della scienza, idea che rappresenta l'operazione analitica qualunque siasi conducente la risoluzione delle equazioni proprie di questo ramo, dell'equazioni dico differenziali: quindi il segno vocale e cifrale vi si richiama dei diversi ordini d'integrali; e se ne mostra la natura analitica: la differenza che passa tra gl'integrali completo, particolare, singolare vi si rimarca: e quella fissandovisi tra il definito e l'indefinito, si viene terminandola col mettervi sottocchi e classificarvi gli oggetti che formar doveano la materia del volume; materia che vi si dà in quattro lezioni divisa e in individuale contrapposto colle prime quattro del primo volume.

Si viene dopo ciò giusta il piano proposto a parlare nella prima lezione dell'integrazione delle funzioni esplicite binovariabili, che val quanto dire delle funzioni ad una variabile.

A questo proposito ho riflettuto che una funzione differenziale comunque composta non può essere che il risultato della differenziazione applicata ai tre algoritmi primitivi della scienza, il risultato cioè immediato o trasformato della differenziazione da me detta *elementare* nel primo volume: donde ho conchiuso che l'integrazione delle funzioni differenziali elementari è il punto di riduzione di ogni integrazione, epperò il primo e il fondamentale oggetto da considerarsi nella teorica delle integrazioni. Quindi rimarcando che l'integrazione elementare non è che l'operazione inversa della differenziazione elementare, ho veduto nell'inversione delle regole di questa, le regole di quella, e son venuto immediatamente a rapportarle disposte in una tavola, quale base fondamentale della discussione sul proposito. Stabilite queste basi dopo alcune osservazioni relative alla costante arbitraria omessa nelle formole della tavola, si mette in forma analitica la questione; questione che non si sa in generale nè saprassi forse mai risolvere direttamente, e che tutto il dire relativamente alla sua soluzione non può ridursi che ad un'esposizione ragionata dei metodi principali e i meno particolari che la scienza possiede.

Per procedere con ordine e ragione son venuto seguendo la classificazione delle funzioni in algebriche e trascendenti. Le funzioni differenziali binomie sono fra le prime le più semplici e le più immediate a posare sulla tavola predetta, e la loro integrazione forma un soggetto su cui si viene ordinariamente a di-

scorrere in tutti i trattati di calcolo integrale. Quindi io ho incominciato da essa la discussione de' metodi d'integrazione, la quale presenta altronde una specie di esempio delle prime trasformazioni onde una differenziale si riduce all'applicazione immediata dell'integrazione elementare. Guardando la cosa con tutta la generalità, l'ho veduto sotto due aspetti distinti: d'immediata ed esatta integrazione, e di mediata per riduzione a qualche altra funzione simile di conosciuto integrale. Sotto il primo aspetto ho presentato i quattro casi in cui ammette l'esatta integrazione, e ne ho dato l'analisi; le rispettive forme onde sono algoritmicamente rappresentati ne ho prodotto; e con delle funzioni particolari li ho esemplificato: sotto il secondo la ricerca in tre articoli vi divido, che l'essere relativo dei due esponenti della funzione ci offre; ne discuto ciascuno colla maggior generalità e laconismo; le formole generali rispettive vi dimostro e conchiudo, onde la proposta riduzione si opera; e finisco sempre il caso applicando a degli esempj concernenti. Quindi per niente omettere di quanto potrebbe dirvisi son venuto facendo menzione delle funzioni differenziali polinomie simili alle predette binomie che ne sono un caso particolare, e che nell'ordine ragionato delle idee immediatamente quasi da se si presentano: ma quivi per non molto prolungarmi non mi son fatto che a rimarcare soltanto di potersene sempre avere gl'integrali col metodo stesso di riduzione nel caso in cui gli esponenti del polinomio non pro-

cedono che per serie a differenze, ed ho rimandato al primo tomo del calcolo di M. Dubourguet per riscontrarne il fatto analitico.

Dopo questa discussione son venuto a considerare la funzione integranda giusta la classificazione generale delle funzioni, distinte in algebriche razionali ed irrazionali. Un metodo generale dovuto a Giovanni Bernoulli si ha pel trattamento del primo caso; nel mentre che quello del secondo non conosce che delle vedute e degli artificj particolari di analisi. Quindi io venni esponendo a riguardo del primo caso cotesto metodo, e relativamente al secondo per quanto l' estensione del volume permetteva, le risorse principali che la scienza possedea. In effetto ho incominciato dal richiamare che la funzione razionale può essere intera o fratta: e rappresentando ambedue i casi con una sola e medesima formola, ho sopra di essa fissato il mio dire. Quivi ho rimarcato che nel primo caso la sua integrazione non si riduceva immediatamente o mediante lo sviluppo dei polinomj che a quella elementare delle funzioni potenze monomie; e nel secondo caso da essa integrazione elementare e da quella in ultim' analisi di una funzione fratta propriamente detta. Quindi questa ricerca non riuscendo nel fatto che dipendente dall' integrazione di una funzione frazione, in cui il massimo esponente della variabile è di un' unità almeno minore nel numeratore che nel denominatore, ne venne che io mi fossi dato ad esporvi il predetto metodo bernulliano. Questo metodo non consiste che in iscomporre la fra-

zione proposta nelle sue frazioni parziali, e nell' integrarne queste frazioni. La prima parte era stata da me discussa nella quinta lezione del primo volume: onde non ho considerato in questo luogo che l' integrazione delle due funzioni, a cui quella scomposizione conduce in generale: ne ho effettuato l' una colle risorse che l' integrazione elementare immediatamente ci esibisce; e l' altra via dell' esposto metodo di riduzione delle funzioni differenziali binomie: ed applicando il tutto alla frazione speciale discussa e scomposta nella testè citata lezione, ne do gl' integrali delle sue frazioni semplici, e per essi il suo integrale completo. Quindi passo all' altro caso delle funzioni algebriche, alle irrazionali.

Qui ho rimarcato che due risorse si presentano sul proposito; quella di risolvere la proposta funzione in un seguito di monomj, o di ridurla a razionale. Rimando per la prima ai noti metodi dello sviluppo delle funzioni in serie ed alla tavola delle integrazioni elementari; e mi fo a riflettere per la seconda che l' irrazionalità può cadere sull' intera funzione o sopra parte di essa. Vi richiamo presente pel primo caso il metodo concernente; e ne fo sentire l' imperfezione e la poca utilità, dipendendo dalla risoluzione algebrica delle equazioni. Ciononostante per fissarne e renderne marcate le idee col fatto di un processo analitico, vengo applicandolo e a metterlo sottocchi con un esempio. Riguardo al caso poi in cui l' irrazionalità non cade che sopra parte della funzione, io fo conoscere le insufficien-

tissime nostre conoscenze nella generalità della questione; questione che nelle stesse: forme le meno generali della funzione per le quali si hanno de' metodi, la discussione vi riesce sovente di nessun effetto stante la mancanza di quelli da' quali dipende; e che fino nei casi i più semplici vi è sempre difficile e complicata. Intanto per non lasciare la cosa senza discorso, uno de' più facili venni proponendone e convenevolmente a discuterne come in esempio.

Quando la funzione non si trova trattabile con alcuno dei metodi esatti conosciuti, non avvi altro compenso che di ricorrere all' approssimazione. Su tal proposito ho considerato che sviluppando la funzione e integrando i singoli termini che ne risultano colla regola corrispondente dell' integrazione elementare, se ne avrà l' integrale per serie. Questo metodo non domanda discussione speciale, dipendendo da conoscenze altronde stabilite. Quindi son passato immediatamente ad una seconda risorsa che il caso presenta nel metodo euleriano conosciuto sotto il nome di *metodo d' integrazione per parti*, e di cui si ha nella predetta tavola la formola fondamentale; formola che condotta convenevolmente mi ha portato alla cosiddetta serie bernulliana, una delle più generali che si conoscono nell' integrazione delle funzioni, e riguardata dai primi inventori dei nuovi calcoli come il teorema fondamentale dell' integrale nell' istessa maniera che quella di Taylor lo era del differenziale. Dopo aver assegnato questa formola, ad un esempio l'ho ap-

plicata: ed usando del risultato una conseguenza utile ne ho raccolto per la rappresentanza indeterminata delle frazioni dell'unità, e con essa il mio discorso sulle funzioni algebriche conchiuso.

Dopo le funzioni algebriche si vengono considerando nel testo le funzioni trascendenti, che vi sono classificate sotto il triplice essere di funzioni esponenziali, logaritmiche e circolari. Con una introduzione brevissima, ragionata e propria del soggetto, se ne riduce rispettivamente la discussione generale del caso alla funzione fondamentale da cui dipende come da elemento: e giovandosi del predetto metodo d'integrazione per parti, unica risorsa all'uopo conosciuta, si considera cotesto elemento sotto tutti i rispettivi rapporti coll'integrazione: i risultati se n'esemplificano: e siccome nel caso di una funzione angolare quando la funzione è una linea trigonometrica, quel metodo non vi è in generale applicabile, e le risorse dell'applicazione non vi sono che speciali secondo che varia vi è la specie di questa linea; così si è venuto a metter termine alla discussione producendo quattro de' più notevoli e generali casi di cui si conosce il trattamento.

Due oggetti restavano ancora a considerare nel corpo di questa prima lezione relativamente ai metodi generali: la valutazione degl'integrali definiti; e l'integrazione delle funzioni degl'ordini superiori. Soddisfo al primo esponendo un metodo euleriano sul teorema di Taylor fondato, di cui ne applico la formola generale che ne risulta, alla valutazione nu-

merica di una trascendente esponenziale monomia a base neperiana: e come il teorema da cui dipende va soggetto nella legittimità ad eccezioni; così passo ad assumere una funzione nel caso eccettuato corrispondente, e a mostrarvi come in esso condursi, onde lo scoglio della eccezione evitare. Soddisfo poi al secondo assunto calcolando con un processo sì analitico che ragionato una formola generale, onde un'integrazione di ordine indeterminato viene rappresentata da un egual numero d'integrazioni semplici l'una sopra l'altra contigua progressivamente operata; e finisco applicandola ad una funzione del quarto ordine.

Il soggetto della seconda lezione non è che l'integrazione delle funzioni esplicite a più variabili. Le conoscenze generali a questo riguardo non sono che assai limitate. Tutto quello che ne sappiamo di generale non si riduce che a due soli metodi; l'uno relativo alle funzioni omogenee; l'altro più generale alle funzioni che sono o no tali.

Dopo alcune riflessioni relative alle funzioni non esatte io son venuto esponendo i predetti due metodi con ordine e generalità. Supponendo sempre esatta la funzione, in quanto nel caso contrario non avrebbe alcuna esistenza analitica, vengo a dimostrare il teorema fondamentale delle funzioni omogenee, cioè che una funzione siffatta previa la permutazione delle variabili ne' loro rispettivi differenziali, eguaglia il suo differenziale diviso pel grado della sua omogeneità; teorema che data una funzione differenziale di questa specie, sul campo

se ne assegna l' integrale. Quindi attesa la prontezza onde in questo caso si effettua l' integrazione, si è venuto applicando immediatamente il metodo a due funzioni particolari: l' una per semplificarlo in estesso, e l'altra in compendio. Si passa quindi al secondo metodo per le funzioni non condizionate all' omogeneità; e si viene a considerarlo sotto i due punti di vista in cui la composizione della funzione può cadere; quello dico nel quale tutti i termini abbracciano tutte le variabili, e quello nel quale non tutti le abbracciano tutte. Intanto ho io riflettuto che integrando la funzione per un solo de' suoi differenziali parziali il risultato nell' uno e l' altro caso non differisce che nella costante arbitraria; essendo nulla nel primo caso, e funzione nel secondo di tutte le variabili meno quella in figura differenziale. Quindi con un processo del tutto generale, e che non ho veduto altrove farsene parola, vengo determinando in questo secondo caso le forme generiche della costante, e mostrando nel fatto analitico particolare il procedimento del metodo tanto nel caso della costante nulla, quanto nell' applicazione di queste formole generali.

L' estenzione e la moltiplicità degli oggetti della terza lezione mi ha condotto a premettervi il piano della discussione. Dividendone l' argomento, l' integrazione cioè delle equazioni, in quella delle differenziali ordinarie e delle differenziali parziali, e alla prima venendo, ho incominciato dal fissarne il soggetto, e il dire a classificarne: son dapprima venuto a par-

larvi dell' integrazione delle binovariabili di primo ordine; quindi della sua riduzione a quella delle equazioni a più di due variabili dello stesso ordine; e finalmente di quella dell'equazioni degli ordini superiori. Distinguendo le equazioni binovariabili delle quali s' incomincia a trattare, in esatte e non esatte, ho rinviato per le prime al caso delle funzioni esplicite cui appartengono, e perciò alle due lezioni precedenti; ed ho rimarcato per le seconde che tre soli metodi diretti la scienza nell' attuale periodo possiede; della separazione delle variabili, del multiplicatore, e delle serie per approssimazione. Il metodo della separazione non consiste che a dividere in due membri tali l'equazione che ciascuno non contenga che una sola delle due variabili, e a ridurne così l' integrazione a quella delle funzioni unovariabili. S' ignora una regola tuttora onde operarlo in generale: quindi prendendo la questione per quanto lo stato presente del sapere comporta sotto il punto di vista più generico, mi son fatto a dividere le equazioni in omogenee ed eterogenee. Vi ho trattato il primo caso con tutta la generalità, ed illustratone con un esempio il fatto analitico. Procedendo sempre con viste generiche son venuto in seguito esponendo il processo ragionato onde se ne trasformano le eterogenee, o che ad esso si riducono. Ho applicato il processo generale alle cosiddette equazioni a due e a tre termini: vi ho fatto notare il vero spirito del metodo: e imbattendomi nel cammino sulla famosa equazione sotto il nome conosciuta di *equazione*

del Conte Riccati, ne ho dato la completa teoria; disposto in una tavola colla legge onde procedono le infinite soluzioni di cui è capace; e l'uso dato a vedere coll'applicazione ad una equazione numerica concernente. Quindi qualche riflessione producendo sul metodo stesso della separazione, ho pria di lasciarlo con ogni dettaglio considerato il caso di quelle equazioni che separate e non integrabili algebricamemte a membri divisi, ammettono frattanto un integrale algebrico a membri combinati quando i due membri lo danno divisamente per logaritmi, o per archi di cerchio, o in certi altri casi ancora fuori di essi. Mostrando come ciò si effettua ne'primi due casi, vengo di proposito sul terzo più complicato: ne espongo alla mia maniera il metodo generale che vi ha dato Lagrange; e lo applico al fatto di quell'equazione separata onde i due membri per le vie algebriche condotti portano alla specie di trascendenti dette ellittiche da Legendre e su di cui son ritornato più di proposito nel terzo volume.

Passando al metodo del moltiplicatore mi giova riflettere che la prima idea a presentarsi nell'integrazione delle equazioni non esatte è quella di renderle esatte, e ridurle così a quella delle semplici funzioni. Questa riduzione è sempre possibile nel caso delle binovariabili di di cui si tratta, avendo dimostrato Lagrange che per esse esiste sempre in tutti gli ordini una funzione per la quale moltiplicate viene operandosi. Quindi dopo di essersi dimostrata l'esistenza di questa funzione per le equazioni

di primo ordine di cui è parola, si venne ad esporvi i metodi conosciuti per definirla. Ho io incominciato dal metodo generale e diretto, il quale conducendo ad un' equazione di condizione a differenziali parziali, riduce la questione in maggiori difficoltà di quelle stesse che la proposta non soffre. Per darne intanto una soluzione io mi proposi il caso particolare in cui la funzione moltiplicatrice non è a due ma ad una sola variabile; il che porta l' equazione di condizione a dipendere dall' integrazione di semplici funzioni unovariabili; e perciò a considerarsi come immediatamente integrabile. La integro dunque e vengo alla determinazione del fattore e della forma insieme delle equazioni che ne sono rese esatte. Dopo ciò ho io riflettuto che trovato il fattore se ne potrà indurre l' integrale dell' equazioni alle quali appartiene. Quindi ho messo al fatto questa riflessione in generale: ne ho applicato le consequenze analitiche alle equazioni lineari di primo ordine, e l'integrale ne ho assegnato tanto in genere quanto nella specie di un caso particolare,

Quando un' equazione sa separarsi se ne potrà assegnare il fattore: tuttochè in questo caso la ricerca del fattore sembra in se stessa superflua, perchè un' equazione seperata si ha per integrata, frattanto se ne sperimenta alle volte utile la conoscenza, potendo dedursene quello di altre equazioni non separabili. Quindi son io venuto a provare col fatto questa proposizione; con un metodo generale e rimarchevole ad assegnarlo per una famiglia assai

estesa di equazioni, per le quali il processo della separazione non è punto conosciuto; e ad illustrarlo infine con un esempio. Esposte le industrie conosciute di analisi onde riconoscere la forma di un fattore integrante, si possono proporre i due quesiti seguenti. Quali sono i fattori che rendono esatta una data equazione? Quali le equazioni che riescono esatte con un fattore dato? Il primo non presenta punto di difficoltà: molte il secondo ne presenta. Ho risposto al primo con un procedimento generale, che per renderlo maggiormente chiaro ho applicato ad un caso speciale e notevole: ho risposto al secondo, conosciuto sotto il nome di *metodo inverso del moltiplicatore*, mostrandone la difficoltà della soluzione, e per non troppo allungarmi sottocchi soltanto mettendone uno de' casi più semplici di noto trattamento, che ho ancora illustrato con un esempio.

Al metodo del moltiplicatore siegue nel cammino naturale del discorso quello dell'integrazione per serie. Due risorse ha la scienza a questo riguardo, e che, io non ho mancato di dare a conoscere. Dopo aver fissata l'idea che dee formarsi del metodo in se stesso, e il rango che a giusto dire occupa nella teorica delle integrazioni, son venuto primamente a mostrarne quella che sulla ripetita differenziazione si fonda; e quindi l'altra, che dal metodo ordinario de' coefficienti indeterminati si fa dipendere: della prima tuttochè generale ed applicanda eziandio alle equazioni degli ordini superiori, ne ho mostrato l'insufficienza e il poco uso, principalmente ne' casi un poco

complicati; e della seconda di cui suole ordinariamente giovarsi, lo sviluppo ne ho dato coi convenienti dettagli; e conchiudendo due esemplificazioni ne ho rapportato onde le due diverse maniere di applicarla mostrarne. Qui ho lasciato l'esposizione delle teoriche conosciute sugl' integrali completi, ed ho passato ad un' altra classe d' integrali, a quella dei singolari.

Le equazioni differenziali oltre di essere soddisfatte da un' equazione primitiva abbracciante una costante arbitraria, possono simultaneamente esserlo ancora da un' altra, solita dirsi *soluzione particolare*. Questa seconda soluzione sospettata per la prima volta da Taylor e da altri geometri in seguito riconosciuta e discussa, venne infine legata ad una teoria analitica dal Lagrange. Nell' introduzione a questo volume si era rimarcata la differenza che passa tra la soluzione particolare, che io ho detto integrale singolare, e l'integrale completo: ed è sull' essere analitico di questa differenza onde si fondano i diversi metodi conosciuti per ricercarla. Ho supposto in primo luogo dato l' integrale completo e son venuto a mostrare come il singolare di cui si tratta se ne deriva. Due metodi ho prodotto a questo riguardo: l' uno appoggiato alla determinazione della costante arbitraria sotto l' equazione di condizione che lo caratterizza; l' altro sul solo carattere poggiando della variabilità di cui in questo caso la costante si veste, ho condotto riducendolo ad un criterio analitico che sebbene non del tutto definitivo, guida a

decifrarlo e a riconoscerlo: e quindi illustrando rispettivamente con un esempio l'uno e l'altro metodo, son venuto passando ad un secondo modo di ricercarlo; quello cioè che non essendo dato l'integrale completo lo sia il fattore integrante. Risolvo quest'altro caso analiticamente: lo illustro coll'esempio delle equazioni differenziali omogenee: e vengo al vero metodo diretto onde procedere alla conoscenza dell'integrale cercato; metodo in cui non si suppone data che la sola equazione differenziale per la quale si cerca. L'analisi sottile e ragionata onde questo metodo si conduce, mi ha presentato sul cammino occasione di un utile rimarco, esibente l'integrale completo nell'atto stesso di cercarne il singolare; rimarco che ho contestato col fatto analitico di un caso particolare. Ripigliando dopo questa specie di brevissima digressione il filo diretto delle mie idee su gli integrali singolari, procedo sempre l'analisi conducendo dalla ragione sostenuta; ed arrivo a conchiudervi due regole generali per la loro determinazione, che vengo entrambi esemplificando. Vengo dappoi ad esporre il metodo generale onde posta la conoscenza degli integrali singolari o particolari può a quella dei completi arrivarsi: quindi la risorsa unica produco che l'analisi conosce sull'integrazione de' gradi superiori: e chiudo la mia discussione sull'integrazione delle equazioni binovariabili di primo ordine.

L'integrazione delle equazioni differenziali a più di due variabili nell'ordine ragionato delle idee immediatamente dopo si presenta

alla discussione. Questa classe di equazioni possono essere esatte o non esatte. Si discute il primo caso richiamando dalla mia *Introduzione allo studio della matematica sublime* il metodo generale ivi razionalmente proposto, applicandolo al fatto analitico, e con un esempio le conchiusioni illustrandone. Il metodo per le non esatte è quello di ridurle ad esatte come nella classe delle binovariabili. Il metodo del moltiplicatore, generale per operarlo in queste ultime, non lo è per quelle ad un maggior numero di variabili: il moltiplicatore non esiste per esse che sotto una certa condizione, condizione che sotto l'espressione si presenta di un' equazione fra i coefficienti dell' equazione data. Prendendo dunque di mira per fissare le idee le equazioni ternovariabili, se ne è cercata questa condizione: supponendosi il caso in cui ha essa luogo, si è dimostrato come senza venire al fatto di assegnarvi il fattore epperò senza la sua peculiare conoscenza, può effettuarsi l'integrazione della data equazione: applicandosi il metodo ad una equazione integrata dall'Eulero con assai notevoli industrie si è esemplificato il caso in discorso insieme e soddisfatto all' illustrazione promessa relativamente alla ricerca degl' integrali completi mercè i singolari o i particolari; addimostrato l'uso del metodo generale datosi nella seconda lezione a riguardo dell' integrazione delle funzioni a molte variabili; e stante il bisogno che il caso stesso me ne presentava si è applicato e reso ragione del famoso teorema leibniziano in origine sotto la frase enunciato di

differentiatio de curva ad curvam. Quindi facendo la convenevole menzione onde il dato metodo per le equazioni ternovariabili veniva applicandosi a quelle di un numero maggiore, si venne a parlare dell'altro caso dell'integrazione, di quella dico delle equazioni per le quali la condizione del fattore punto non ha luogo.

Questo caso è quello delle equazioni che si videro altra volta classificate sotto il nome di equazioni assurde, e trattate sotto un articolo proprio e separato; caso che forse per la prima volta nelle nostre lezioni, è stato preso e discusso quale argomento parziale e integrante della teorica generale delle equazioni di che si tratta. Tenendo le rette vie del ragionamento, le maniere allo incirca seguendo de' geometri contemporanei, e il tutto riunendo sotto un solo e medesimo punto di vista, io ho fatto costare che le cosiddette equazioni assurde non sono capaci di alcuna soluzione determinata, ma solo lo sono di una indeterminata; verità su di cui ho convenientemente illustrato con degli esempj tutto quello che di essenziale vi si conosca. Non contento di un modo di soluzione siffatta del problema, ho voluto io prenderla all'ingrande, e a trattarla con tutta la generalità. Senza venire al punto di vista particolare ordinariamente seguito di distinguere le equazioni in esatte e non esatte, in integrabili e non integrabili, ho sottomesso immediatamente l'equazione qualunque si fosse al testè citato metodo della seconda lezione relative alle funzioni multovariabili, e sono

arrivato all' integrale determinato quando lo ammette, o all' indeterminato quando di questo è capace e non di quello. Quindi illustrando questa mia nuova soluzione con degli esempj, che prendo da quelli ad altro oggetto usati anteriormente, metto termine alla discussione in parola delle equazioni differenziali ordinarie a più variabili indipendenti, dando una nozione sul modo onde si trattano ne' gradi al primo superiori.

Passando quindi alle equazioni cosiffatte degli ordini superiori, si è venuto a farvi sentire la povertà somma delle nostre conoscenze a questo riguardo: e dopo avervi segnalato il punto di vista cui tende il metodo generale di trattarle, mi son limitato e ristretto a parlare delle sole binovariabili. Fra queste non vengo esponendo con viste sempre tendenti a mettere la questione sotto un aspetto semplice preciso filosofico, che il metodo generale per le lineari di tutti gli ordini. Intanto per non lasciare la discussione del metodo in sospeso e nell' indefinito come porta la generalità onde conducesi, e mostrarne sino alla conchiusione l' andamento, son venuto ad applicarlo in primo luogo ad un' equazione di terzo ordine, e quindi per mettere sottocchi la diversità dei casi accadevoli, ad un'altra di secondo ordine che la soluzione comprende del cosiddetto *problema dei tre corpi;* problema famoso negli annuali della meccanica celeste, che i travagli di Clairaut, di Alembert e di Eulero hanno illustrato. Passando sotto silenzio le pochissime conoscenze alle quali avrebbe potuto venirsi a

riguardo delle equazioni al terzo ordine superiori mi son fatto a discutere brevemente le principali e più utili dottrine che si conoscono sopra di quelle di secondo ordine in generale; dottrine che non ho mancato mai di sostenere con delle convenienti esemplificazioni. Ed applicando a questo caso il metodo d'integrazione per approssimazione, ho conchiuso la teorica delle equazioni differenziali ordinarie, ed a quella son venuto tanto severa e sublime delle differenziali parziali.

L'integrazione delle equazioni a più di due variabili può versarsi sulla totalità delle equazioni come si viene di vedere, ovvero sopra alcuna delle equazioni parziali, in cui può dividersi per la indipendenza reciproca delle variabili: quest'ultimo caso riesce assai più difficile e sublime del primo; tanto che si reputa per trattato quando si avrà ad esso ridotto. A questo riguardo ho io proceduto sotto l'istesso punto di vista del caso precedente, parlando del primo ordine e quindi degli ordini superiori. Incominciando dunque dal caso più semplice, dalle equazioni dico lineari a tre variabili, ed assumendo un'equazione cosiffatta, la combino dietro le note vedute del Lagrange colla sua totale corrispondente; il risultato in due equazioni binovariabili ne partisco; integro rispettivamente queste due equazioni e ad un'equazione integrale pervengo, la quale abbracciando una funzione arbitraria l' integrale completo ne rappresenta. Quindi dopo qualche convenevole considerazione sull'essere relativo di questa funzione e sulla sua determinazione, passo

alle equazioni parimenti lineari a quattro variabili, che tratto col metodo stesso, ed arrivo ad un' equazione primitiva con una funzione arbitraria non di una come sopra, ma di due indeterminate. Estendendo le considerazioni alle equazioni ad un numero indeterminato di variabili vi conchiudo per analogia l' essere del corrispondente integrale completo: producendo finalmente tre esempj onde il tutto vedere con maggiore chiarezza, passo a prendere la questione in generale qualunque ne sia il grado dell' equazione parziale integranda, e secondo le vedute a procedervi dello stesso Lagrange.

Questo illustre geometra produsse nel 1772 delle considerazioni sull' integrazione delle equazioni di cui si tratta a tre variabili che ad un' altra lineare a quattro variabili lo condussero, la quale da lui ripresa un settennio circa dopo, ad un integrale lo portò con una funzione arbitraria di due e non di una indeterminata come la teoria generale pel caso proposto supponeva. Un risultato cosiffatto colpì Lagrange, e con lui tutti gli analisti che lo seguirono. M.Charpit venne in seguito a discutere questo fatto: e per evitarvi lo scoglio della sentita difficoltà, in vece dell' integrale completo di quell' equazione lineare come il cammino generico del processo comportava, si ristringe ad usarvi il particolare; e con questo ripiego non portò nel processo che una sola indeterminata. Quindi applicando il caso generale così preso a quello di un' equazione speciale di secondo grado, non trova pell' integrale completo della proposta che un sistema di due equazioni inviluppanti una funzione arbitraria

insieme e la sua derivata di quell' indeterminata. Ma un integrale siffatto cadeva in una difficoltà simile alla precedente; anzi più complicata e severa, perchè non sapeva eliminarvisi quella derivata senza supporne conosciuta e particolarizzata la funzione arbitraria. Intanto Lagrange ritornato nel 1806 sull'argomento, e tormentato per servirmi della sua frase dall' incontrata difficoltà, trova colla sua nuova discussione per l' integrale cercato un sistema di tre equazioni, fra le quali una ancora differenziale, con due funzioni arbitrarie; sistema riducibile è vero a due equazioni con una sola funzione arbitraria, ma sempre inviluppato nella differenzialità di cui non sapeva punto spogliarsi, e perciò nelle stesse difficoltà e maggiore complicazione di quello di Charpit, e che domandava dice Lacroix ulteriori sviluppi sull'assunto. Finalmente M. Poisson in una *Nota* (Bullettino del 1815) viene dimostrando che gl' integrali cui si arriva col processo lagrangiano, sono in fondo gli stessi di quelli cui conduce il metodo di Charpit. Ma le considerazioni onde parte il Poisson e viene a questa conchiusione sono in vero astratte e poco concludenti; tanto che il Lacroix riferendo il contenuto della Nota si è creduto dispensato a tenerne conto. Quindi dall'esposto su di cui potrà utilmente riscontrarsi il terzo volume della seconda edizione del Calcolo di questo geometra, appare che in cotesta epoca la difficoltà lagrangiana non solo non era stata direttamente risoluta, ma le risorse usate per condurre il metodo sino alla conchiusione del-

l'integrale non si trovano che tutte indirette e conducenti a risultati di niuna utilità nel fatto della ricerca. In questo stato di cose io ho preso a discutere la questione, ed esponendo il metodo con un procedimento tanto semplice e generale quanto ragionato, son pervenuto sull'equazione che il nodo formava della difficoltà, e mi son dato a vederne la ragione, e l'ultima significazione a snodarne. Infatti ho io rimarcato che questa equazione non è che il prodotto di un falso ragionamento, e forma un paralogismo piutosto che l'inviluppo di una difficoltà che si è preteso di vincere e di sviluppare. Essa interamente arbitraria annoda nella sua incognita composizione un coefficiente differenziale, che bisognerebbe eliminarvi prima di far parte completante dell'integrale cercato; eliminazione ho fatto riflettere, di non potersi nullamente operare. Quindi nel trovarsi essa in contraddizione colla teoria generale concernente, non deve guardarsi come una difficoltà da risolvere, ma come una specie d'inciampo che manifesta l'impossibilità del metodo conducente: e che bisognava perciò altro cammino seguire onde all'assunto soddisfare. Conchiuso ciò mi fece ad esporre un metodo che in una maniera assai semplice e pronta mi ha condotto all'integrale proposto, e che venni quindi illustrandolo coll'applicazione ad un'equazione speciale presa dall'istesso Lagrange; integrale dico rivestito di tutti i caratteri di un integrale completo e che ho dato sotto la doppia espressione di cui è capace, abbracciante cioè due costanti arbitrarie o una fun-

zione arbitraria in apparenza di due ma in sostanza di una sola indeterminata.

Dai gradi superiori si è passato a parlare degli ordini superiori. Quivi si son fatte sentire le ristrette conoscenze in cui siamo sul proposito: e dopo alcune generali ed utili considerazioni sulle equazioni di tutti gli ordini si è venuto esponendo il metodo che il Conte Monge ha tenuto nell' applicarne al secondo ordine il lagrangiano per le lineari di primo ordine; a divisarne come se ne potrebbe estendere l' applicazione agli ordini ulteriori, e ad applicare il caso a quello de' coefficienti costanti. Quindi il teorema fondamentale producendosi del calcolo delle variazioni ne' suoi rapporti col calcolo integrale, cioè che le funzioni variazione e integrale sono funzioni commutative, si viene alla quarta ed ultima lezione del volume.

Si dà in questa quarta lezione per quanto la povertà delle conoscenze comporta, un saggio elementare ma nel suo tutto completo sul calcolo delle retrodifferenze. Vi ho io incominciato dal fissarne l' idea fondamentale: e seguendo il medesimo piano del calcolo dei differenziali a trarne son venuto dal calcolo diretto le regole fondamentali dell' inverso, che ho applicato successivamente all' integrazione delle funzioni unovariabili, delle esplicite multovariabili, e finalmente delle implicite. Ne ho dato nel primo caso quella dell' addizione, della moltiplicazione, e della graduazione; ed in quest' ultima quella delle funzioni elementari potenze esponenziali logaritmiche circolari: in-

tegrazione che dopo qualche osservazione convenevole sulla costante arbitraria, applico alle funzioni composte. Tutte le funzioni che nella presente età della scienza vi si sanno integrare sono presso a poco comprese sotto l'espressione di tre formole generali, la di cui discussione dipende dal metodo d'integrazione per parti. Quindi ho io costruito all'uopo sopra di questo metodo procedendo una formola generica, che si applica consecutivamente a coteste tre funzioni generali; il processo analitico in generale ne espongo; e senza punto venire ad illustrarne i risultati per non inciampare in calcoli sempre lunghi e complicati, vengo a mostrare il metodo che si tiene per l'integrazione per serie; e a darvi due formole di decisa utilità per la retrodifferenza di una funzione in generale. Quindi passo alle funzioni moltovariabili. Assai limitato si trova il mio dire a questo riguardo, non conoscendo autore che abbiane parlato con aggiustatezza e precisione. Mi son fatto soltanto a considerare brevemente il carattere essenziale della questione; e a dare a tale oggetto l'applicazione della predetta formola generale alla valutazione del prodotto di due funzioni potenze elementari; ricerca su di cui è venuto di proposito il Cav. Brunacci, e discusso con maniere sì incerte ed indirette che parmi di non presentare alcuna idea di un qualche metodo d'integrazione.

Le funzioni implicite, ultimo oggetto della discussione di questa quarta lezione, possono essere a differenze ordinarie o parziali, a differenze indipendenti, a differenze differenziali. Po-

chissimi sono gli avanzamenti che ha fatto la scienza a quest' oggetto: i pochi passi che ha dato relativamente a quelle a differenze ordinarie o parziali, non si estendono che alle lineari solamente: niente ci presenta poi in quelle a differenze indipendenti, le quali nella discussione non si riducono in sostanza che al caso di semplici funzioni: e finalmente delle conoscenze assai incomplete ed elementari ci offre nell' ultimo caso delle a differenze-differenziali. In questa posizione dell' argomento io mi son fatto a dare primamente l'integrazione di quelle a differenze lineari ordinarie che ho limitato al secondo ordine, ritornando nel terzo volume sopra di esse in generale; e che applicando al caso de' coefficienti costanti, vi ho determinato la costante asbitraria. Quindi passando a quelle a differenze parziali, per fissarne le idee vi ho esposto la teorica concernente delle lineari ternovariabili di primo ordine: e venendo in fine a quelle a differenze mescolate, una nozione fondamentale ve ne ho dato; e coll' integrazione di due equazioni cosiffatte, l'una di primo e l' altra di secondo ordine, ho conchiuso la metodologia inversa, che il soggetto formava di questo secondo volume.

TERZO VOLUME
(Tomo terzo parte prima).

Sulla quinta e sesta lezione della metodologia inversa della matematica sublime versanti sugli usi algebrici ed aritmetici dell' integrazione.

Alcune circostanze come ho avvertito in un notabene, hanno fatto che si fosse diviso in due parti il tomo terzo dell' opera, formandone della prima un terzo volume ed un quarto della seconda. Così partito questo tomo in due volumi, ne è risultata divisa in quattro la intera opera. Intanto l' integrazione applicata a degli oggetti di analisi pura, epperò alle quantità algebriche, aritmetiche e geometriche, formava la materia del tomo terzo, materia che nel piano generale si era classificata sotto la triplice esposizione di usi algebrici, usi aritmetici ed usi geometrici. Quindi venne a farsene della prima e seconda esposizione il soggetto del terzo volume, e dell' ultima quello del quarto. Entrando dunque a parlare del terzo volume, volume dico che presentato in omaggio all' Accademia Reale delle scienze in ago-

sto 1834 (Institut Journ. Paris) venne rinviato per fargliene rapporto orale all' illustre suo membro G. Libri, ed incominciando dagli usi algebrici ho considerato che essi non possono riferirsi che ad equazioni a differenziali a differenze o a differenze-differenziali: inoltre al primo caso venendo, ho riflettuto che l' equazione può esservi costante o variabile, cioè essere il soggetto del calcolo differenziale ordinario o delle variazioni: Infine distribuendo la materia dietro a questa classificazione ho notato che le serie sono in fondo l' argomento dell' analisi matematica, proposizione che non ho mancato di sviluppare più tardi: quindi prendendole di mira nella prima delle proposte applicazioni, nell' uso cioè dell' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie, guidato sempre da una considerata e sottile filosofia, mi sono occupato della maniera di sommarle e d'interpolarle. Per quanto riguarda al sommarle sulla considerazione che i metodi i più generali vi si debbono sempre riguardare come metodi particolari e non estesi che ad una sola famiglia di funzioni, io mi feci ad esporne i due più generici dirò così che la scienza possedeva. Per quanto riguarda poi alla interpolazione dopo di averne fatta sentire la natura e l' indole analitica, venni le vie seguendo della maggiore generalità, a considerarla nel doppio suo essere, quello in cui la legge della serie è da una funzione analitica rappresentata o ad un processo di derivazione analitica condizionata.

Il primo de' due citati metodi relativi al sommarle è interamente legato al teorema di Taylor. Questo metodo con molta brevità e speditezza conduce per la cercata somma della serie ad un risultato dipendente da coefficienti che bisogna determinare. Legendre per questa determinazione avea usato ne' suoi *Esercizj* un processo analitico che sebbene assai ingegnoso, non lasciava d' impegnare in calcoli molti prolissi e complicati. Questi coefficienti sono stati nel nostro testo definiti con un processo assai semplice e piano.

Il secondo de' due metodi proposti dovuto in origine all' Eulero, sembra di essere stato caratterizzato dal Lagrange per l' unico metodo generale conosciuto sull' assunto. Il principio generale ond' esso posa, si riduce a sottomettere la serie sommanda a delle operazioni conducenti ad un' espressione più semplice e tale che se ne conosca la somma o che sia di più facile sommazione. Per mostrarne la condotta analitica venni applicandolo con quell' ordine e generalità che per quanto parmi non si era ancora fatto, al caso dallo stesso Eulero discusso di una serie algebrico-geometrica rappresentata dalla funzione $(fn : \varphi n)\, x^n$; discussione ha detto il Lagrange che merita di essere conosciuta, e che condotta con maniere mie proprie mi ha portato a rappresentarvi la somma cercata via di una formola generalissima, e dipendente da un numero di ripetute differenziazioni eguale al grado della

funzione numeratore fn e di ripetute integrazioni pari a quello della funzione denominatore ϕn. Quindi per compimento della discussione venni illustrandola coll' esempio di quattro serie, due algebrico-geometriche di secondo ordine, e di terzo ordine le altre due. Esposto questo artificio di analisi assai laboriosa e severa come potrà vedersi nel testo, sono io passato a vedere il metodo in un' altra famiglia di serie sotto il nome classificate dall' Eulero di serie ipergeometriche. Ho discusso quest' altra applicazione sull' individuo di questa famiglia che Lagrange ha trattato nella sua teoria delle funzioni analitiche. E procedendo alla mia maniera sono arrivato dalla mia banda non solo all' equazione lineare che egli ne ha dato, ma a produrvi ancora l' integrale che la somma indefinita ne rappresenta.

Dopo questa discussione son passato ad alcune rimarchevoli considerazioni sulla somma in genere delle serie: ne ho considerata la natura in sestessa relativamente all'essere di convergenti e di divergenti: sotto quest' ultimo rapporto l' uso in analisi ne ho contemplato; l' opinamento concernente del Poisson, quello che ve le vuole escluse del tutto, ne ho cosiderato ; la modificazione a cui esso assogettar si dovrebbe, ne ho fatto rimarcare; l' influenza infine ho notato di questo pensamento sull' uso della formola di Taylor come base del calcolo differenziale, varie considerazioni producendovi contro le conseguenze che sembra averne voluto tirare a questo riguardo il Cauchy nel

Riassunto delle sue lezioni di calcolo. Il filo delle idee mi ha quindi portato sulla riduzione di questa formola ad espressione difinita, che ho effettuato colla massima prontezza e facilità con un processo spedito e proprio mediante un integrale definito come la circostanza domandava; e questa riduzione mi ha essa stessa richiamato l' idea del bisogno di metodi per la valutazione di cosiffatti integrali : quindi utile e convenevole mi parve di venire sopra di essa. Cosa niente difficile essa si trova quando l'integrale si sa assegnare: moltissima però e assai severa riesce quando è trascendente. Intanto nelle applicazioni fisico-matematiche non si conchiude ordinariamente sul concreto che colla valutazione di qualcuna di queste trascendenti. Onde i geometri che in quest' ultimi tempi dati si sono alle sottili applicazioni della fisica, son venuti di proposito sul fatto di coteste valutazioni: ma sì varia sì disunita ed estesa è la sfera del loro essere che non vi si cammina che sul particolare; tanto che ha portato il Lacroix a proporre di dirigerne il lavoro a formarne delle tavole onde al bisogno ricorrervi. In questo stato di cose per dare un ordine al mio dire in una materia dirò così senza limiti, l' ho diviso in due articoli: nel primo mi feci a dimostrare con maniere semplici e spedite de' teoremi generali tendenti a stabilirne le fondamenta; e nell' altro a mostrarne l' uso nel calcolo delle funzioni e delle equazioni.

Ho incominciato dunque col fissare l' es-

sere analitico delle trascendenti di che si tratta: e mettendo in considerazione le segnature diverse che proposte se ne erano, mi sono attenuto con qualche modificazione relativa alla posizione dei limiti, modificazione oggi ordiariamente usata, a quella di Fourier. Quindi tutto di seguito son venuto a statuirne il teorema fondamentale dell' intera teorica, quello dico che un integrale definito si cangia di segno come se ne invertono i limiti; e da questo un secondo ne deduco, col quale un integrale definito viene scomponendosi in un seguito di altri integrali definiti. Queste due teoremi fecondi di utilità, altri diversi ne conducono concernente la permutazione dei limiti: ed io altri sette venni a dimostrarne e a produrne, che stante il loro frequente uso e la somma loro utilità nella trasformazione delle funzioni, meritano di essere conosciuti. In seguito son passato a rendere ragione di un teorema notevole nella teorica in discorso; teorema che dalla formola lagrangiana ho dedotto, e frequentemente usato dice il Cauchy nella ricerca dei valori approssimati degli integrali definiti. Immediatamente dopo ad un altro teorema son venuto, che il Poisson ha rapportato dimostrandolo nel Giornale della scuola Politecnica (an. 1820), e che forma in oggi ci dice il teorema fondamentale di questa dottrina; teorema di cui avea io dato la dimostrazione e fatto sentirne l' inesattezza essenziale fin dal 1814 nel mio opuscolo sul calcolo differenziale, e che ho immediatamente in questa occasione derivato colle restrizio-

ni che gli son proprie dal teorema precedente. Un altro infine ne ho da questo medesimo dedotto riguardante la valutazione di una funzione che può in altre due funzioni fattori essere scomposta.

Nel secondo volume è stato dimostrato il teorema per differenziare sotto il segno integrale: qui s'è impreso a dimostrarne l'inverso, quello d'integrare sotto cotesto segno. Questo teorema utile non solo nella teorica in cui siamo ma importante ancora in quella degli integrali doppj, vi è stato a dovizia discusso: vi si è dimostrato che la proposta integrazione non consiste che in quella della funzione sotto il vincolo integrale; e che nella ricerca degl'integrali doppj è affatto indifferente l'ordine da tenersi nelle integrazioni semplici se si tratta d'indefiniti, ma che può non esserlo se di definiti si tratta: si è esso applicato in seguito nel secondo articolo della presente discussione ad un caso molto trattato dal Cauchy, e da Lacroix annunziato per rimarchevole.

La grandissima difficoltà che sovente incontra la determinazione delle funzioni arbitrarie degl'integrali delle equazioni differenziali parziali portò il Fourier per evitarla a giovarsi nelle sue ricerche sulla teoria matematica del calore, degli sviluppi indefiniti delle funzioni in serie a coefficienti ed esponenti arbitrarj. La determinazione di cosiffatti coefficienti ed esponenti sotto delle date condizioni, alla considerazione lo condusse di un teorema, che riguarda la trasformazione delle funzioni arbitrarie

in seni e coseni d'archi multipli. La grave importanza che questo teorema ha acquistato nelle quistioni di fisica matematica, mi ha portato di proposito sopra di esso, e a farne con ordine e ragione la discussione.

Il Fourier prendendo primamente di mira lo sviluppo in seni venne a supporre e a trattare come impari la funzione: e sopra di questa ipotesi poggiando con un processo sulle eliminazioni successive condotto, è arrivato a delle formole che si è dato in conchiusione a farle vedere con delle considerazioni geometriche e con un esempio, di non rappresentare la funzione nel supposto caso solamente, ma ancora in quello in cui fosse funzione pari. Questa maniera laboriosa in se stessa e assai prolissa presentava inoltre un essere incompleto, un procedimento indiretto e tortuoso. Quindi è che io son venuto altra strada a camminarvi: e senza alcuna previa supposizione procedendo e con quella generalità che la natura del caso comportava, sono arrivato mediante un processo facile e brevissimo alle medesime conchiusioni analitiche; conchiusioni che ho ridotto sotto la triplice espressione di tre formole generali, dalla prima delle quali ne ho sul campo derivato quella di Lagrange in principio citata. Quivi rapportando la formola rappresentante lo sviluppo della funzione in coseni che con un processo del tutto simetrico si assegna, si è venuto considerando che queste due formole non rappresentavano al giusto la funzione supposta interamente arbitraria, essendo condizionate l'una a cangiar di segno e

l' altra a conservare lo stesso segno cangiandolo x. Quindi son venuto dalla loro combinazione una terza a dedurne interamente generica ed all' oggetto della sua generale significazione corrispondente, formola che vi ho trasformata quindi colla permutazione dei limiti sotto frasi più semplici. L' insieme di queste tre formole costituisce in sostanza il teorema che per essere stato da lui dato con piena generalità si conosce sotto il nome di teorema di Fourier; teorema che via di una sottile analisi ho ridotto sotto l' espressione propria e peculiare a cui lo ha portato il suo autore; teorema che ho esteso al caso generale delle funzioni ad un numero qualunque di variabili; e che combinato con quello leibniziano di differenziare sotto il segno integrale, mi ha dato con molta semplicità il differenziale di ordine indefinito di una funzioue arbitraria tanto intero che fratto, tanto progressivo che regressivo.

Dopo questa sottile discussione si è passato a dimostrare un teorema rimarchevole del professore Vernier, rapportato senza dimostrazione nel *Bullettino* (t.3. Paris 1825).Quivi giovandomi di un altro teorema antecedentemente dimostrato, e punto non conoscendo il cammino dal suo autore seguito, son venuto con un processo facile e spedito che mi appartiene a rappresentare per serie convergente le trascendenti complicate e severe che ne formavano il soggetto. Avanti di conchiudere questo primo articolo sugl' integrali difiniti non ho lasciato di dare una sommaria e fondamentale

conoscenza delle trascendenti ellittiche e di far menzione del metodo d'integrazione per le quadrature. In effetto riguardo al primo oggetto presa la trascendente euleriana fondamentale col radicale quadrato alla quarta potenza esteso della variabile, io son venuto trasformandola a passi larghi procedendo dietro all' elegante processo lagrangiano: e sull' ultimo dei suoi passi mettendo piede mi sono aperta una traversa che mi ha condotto facilmente sui risultati che Legendre ne avea ottenuto per altra via, e che col nome di trascendenti ellittiche avea distinto. Intanto si è venuto dopo ad oltrestendere la considerazione del radicale della funzione euleriana, e delle altre trascendenti se ne sono ottenute che come figlie di una medesima madre alla famiglia delle funzioni ellittiche appartengono, e che col nome di trascendenti ultrellittiche sono divisate; o come a Jacobi ha piaciuto d' integrali abeliani, da Abele giometra Norvegio di alto ingegno e morto assai giovane, che il primo era stato a farne menzione. Ma io non son venuto punto a tenerne conto: la loro origine ne era allora di assai recente data e adolescente dirò così ne è ancora la teorica. Riguardo poi al secondo oggetto io son venuto rimarcando in che la proposta ricerca consisteva in generale, e l' assai elegante e soddisfacente soluzione che il Legendre ne ha dato. Dopo io son passato al secondo articolo della discussione, all' applicazione dico dei teoremi dimostrati.

Le trascendenti che Legendre ha detto *integrali euleriani* perchè il soggetto di molte

bellissime memorie dell' Eulero di cui egli molto si dice compiacevasi, han formato la materia sino in questi ultimi tempi della teoria più completa che si ha sugli integrali definiti, e una risorsa insieme onde facilmente si vengono a comparare ridurre e a valutare un gran numero di altre trascendenti. Questo argomento si è preso di mira per la prima delle applicazioni proposte, discutendovisi in breve con un procedimento per quanto generale per altrettanto pieno e sublime. Si è incominciato dunque dall' annunciarvele come Legendre le ha dato, e trasformadovele dietro a lui sotto una forma più semplice e generica. Lasciata da parte la segnatura usata dell' Eulero, vi si è adottata quella del Legendre, genuinamente per l' integrale detto *di seconda specie*, e con qualche modificazione per quello *di prima specie*. Quindi giovandomi degl' integrali doppj mi ho aperto un cammino brevissimo che tostamente mi ha portato alla formola onde la trascendente di prima specie a quella di seconda si riduce; e così a semplificarne e ad estenderne considerabilmente la teorica; formola che l' esimio professore della Università di Berlino Lejeune Dirichlet ha di recente generalizzata e de' risultati importanti dice il Liouville nelle note a Navier ne ha ottenuto. Traducendo dipoi la formola trovata in frasi della notazione euleriana ne ho prontamente derivato tutte le proprietà di cui essi godono. Infatti ne ho sul campo dedotto i sei teoremi fondamentali in cui si racchiude tutta la loro teoria, e da cui ripetere si possono

tutte le formole date dall' Eulero e dal Legendre: e non potendo venire a cotanti dettagli, contento di rinviare alle opere concernenti del primo e alla seconda parte degli *Esercizj* del secondo, per farne un' applicazione son venuto per quelli di prima specie a darne in funzione della notazione euleriana la rappresentanza generale e la sua riduzione alla forma onde l' ha dato il Legendre nella seconda parte citata; e per quelli di seconda specie a produrne la riduzione in tutti i casi dei valori della sua cosiddetta radice, in tutti i casi dico di radice intera o fratta, positiva o negativa.

Il teorema di differenziare sotto il segno integrale è divenuto fra le mani di Eulero lo strumento di un artificio di analisi che nella ricerca de' valori definiti degl' integrali fa una delle più notevoli risorse che i di lui travagli ci offrono. Il Poisson se ne è giovato in molte ricerche di questa fatta: ed io per una seconda applicazione de' dimostrati teoremi ho preso a discutere la valutazione di una trascendente da lui trattata nel quinterno pel 1816 del giornale della scuola politecnica. Altra strada conducente ad un risultato più conosciuto camminando, con un processo alla mia maniera condotto e molto semplice son pervenuto alla valutazione proposta, facendola in conchiusione dipendere dall' integrazione dell' equazione del Riccati, epperò non effettuabile coll' artificio in discorso che in quei casi nei quali questa equazione riesce integrabile; e rimarcare facendo che può essa in qualche caso servire alla so-

luzione del problema inverso, all' integrazione cioè di questa equazione.

Il teorema d' integrare sotto il segno integrale è venuto a formare il soggetto della terza applicazione. Si sa che cotesto teorema un secondo ne conduce ; quello che nel fatto analitico di un integrale doppio qualunque sia l' ordine seguito nelle integrazioni semplici, se ne avrà sempre il medesimo risultato. Questo teorema però generalmente vero quando si tratta d' integrali indefiniti , va soggetto a delle eccezioni per quelli definiti, abbisognando alle volte come il Cauchy e il Poisson han fatto costare, di una correzione. La ricerca di questa correzione ha formato l' argomento di questa terza applicazione in un caso molto discusso dal Cauchy. Questo caso e quello di due funzioni binovariabili legate insieme sotto la condizione che i coefficienti differenziali parziali per ciascuna delle due variabili ne sieno eguali. Istituitane la ricerca analiticamente si è tosto venuto ad una relazione fra quattro integrali definiti , in cui la proposta correzione si trova marcata e sotto l' espressione sua propria: supposte in questa relazione , relazione molto lodata dal Lacroix e su di cui il Cauchy ha più volte ritornato, le due funzioni immaginarie , che è il caso sul quale questo fecondo analista si è maggiormente fissato, io mi son fatto a rappresentarvi quella correzione sotto un' espressione semplicissima e definita: ed applicate convenientemente le formole in questa supposizione, a rendere ragione analitica sono arrivato di uu teorema celebre del-

l' Eulero, di cui mi era per altra ricerca precedentemente giovato.

L' uso del teorema di Fourier nell' integrazione delle equazioni differenziali parziali è stato il soggetto della quarta ed ultima applicazione. Dopo una breve introduzione ove lo stato della questione ho fissato, ed alcune considerazioni ho premesso sull' indole generica di un integrale per serie a cui il caso appartiene, son venuto ad assumere l' equazione generale del movimento del calore nell' interno de' corpi per materia della mia discussione. Due diverse maniere possono seguirsi nella proposta integrazione: una diretta, maneggiando tutto di seguito l' equazione; l' altra indiretta, scomponendola negli elementi di cui l' indipendenza delle sue variabili la fa capace. Per rendere dunque completa la dottrina della discussione l' una e l' altra io presi a considerare: e dopo aver data ragione al metodo onde vi si andava a procedere, venni immediatamente ad applicarlo all'equazione elemento della proposta, che il movimento lineare ne rappresenta. Ne ho assegnato l'integrale sotto la forma che il Fourier alla sua maniera lo avea dato. Usando opportunamente di esso, son pervenuto all' espressione alla quale Laplace con un processo del genere di quelli caratterizzati per tentativi analitici era arrivato. Ed estendendo questa espressione al caso dell' equazione ternovariabile del movimento generale a tre dimensioni, ne ho ottenuto il proposto cercato. Dopo questo procedimento indiretto son venuto alla maniera diret-

ta di camminarvi. Ma a questo riguardo non mi sono fermato che ad indicare semplicemente la ragione del processo senza punto venirne al fatto analitico; processo conducente al medesimo risultato, e che oltre della minore semplicità e speditezza niente presenterebbe in sostanza di diverso. In questa integrazione lo stato iniziale della variabile funzione non si era supposto che interamente arbitrario: intanto i rapporti fisici della questione altri due casi presentano, ne'quali quello stato iniziale va nell' uno condizionato ad essere rappresentato da una funzione impari, e nell' altro da una pari. Quindi sono io venuto a dare gl' integrali per questi altri due casi; integrali però insufficienti come ho fatto ivi vedere a rappresentare la questione con tutta la generalità, e che abbisognano perciò di una correzione. Il Fourier è ritornato a tal oggetto nel 1828 sopra di questo argomento, e si è dato in una memoria letta all' Accademia Reale delle Scienze a soddisfare questo bisogno. Ma egli ha considerato sempre fisicamente la cosa, e per quanto parmi non è venuto sul fatto che pel primo caso solamente. Onde dopo aver fatto menzione di questo nuovo di lui lavoro mi feci a discutere di proposito l' altro caso: e con un processo del tutto analitico assai semplice e spedito sono pervenuto alla rappresentanza generale e completa di esso, e a conchiudere la discussione sulle applicazioni proposte e il primo articolo dell' assunto sulla somma delle serie. Sono passato quindi al secondo articolo

che ha per oggetto la loro interpolazione.

Deboli e scarse sono le conoscenze di fatto del calcolo integrale a questo riguardo. Quindi a parlarne in generale e a compimento, per quanto l' essere trascendente e severo della questione permette, la ho io presa originalmente e *a priori*. Mostrando il rango che occupa nella scienza, ho dato un guardo filosofico e generale all' essere razionale dell' analisi: la ho applicata alle serie primogenite di essa: ho dato a conoscere degli oggetti di analisi pura per così dire indiretti: di alcuni paradossi analitici ho trattato assai marcati nel ramo trascendentale di essa in cui siamo: ho presentato in fine di volo un pezzo di analisi matematica razionale e specolativa non mai mancante di utilità. Intanto per dare una notizia più precisa di questo notevole tratto del nostro lavoro, vengo considerando che l' interpolazione di che si parla non può guardarsi che sotto due diversi rapporti: l' uno colle serie rappresentate da una funzione analitica, l' altro colle serie procedenti sotto la legge di un processo uniforme e costante di derivazione analitica. Incominciando dal primo, ne ho dato uno sviluppo storico e ragionato che lo caratterizza in generale; e quindi venuto a mostrarne il fatto analitico sopra due casi antecedentemente considerati, sulle serie ipergeometriche dico e su quelle rappresentate dagl' integrali euleriani di prima specie. Riguardo al primo caso dopo averne fatto la discussione convenevole son venuto ad applicarlo a due serie numeriche, a produrne fino all' ultimo stadio l' applicazione,

e a conchiudervi coll' interpolazione rispettiva dei mezzi termini: quindi son passato al secondo, alle serie cioè procedenti per derivazione. Il soggetto intanto primordiale dell'analisi non ci presenta che un sistema di grandezze coesistenti sotto la medesima legge; legge che sotto il processo si annunzia di una derivazione per addizione: la considerazione analitica di questo sistema conduce immediatamente al fatto delle differenze: e quella di questo fatto immediatamente a due generi di calcolo conduce, uno delle funzioni differenze, e l' altro delle funzioni differenziali; ambedue esistenti sotto una legge rispettivamente propria e particolare di derivazione: un terzo sistema ha incominciato non è molto ad essere considerato, quello delle facoltà, procedente sotto la legge di una derivazione per moltiplicazione. A questo proposito son venuto richiamando primieramente dall' antecedente l' essere dei due primi sistemi, ove ne avea dato alla mia maniera di ragionare la genesi algoritmica; e dappoi sull'ultimo a fissarmi di cui non avea ivi punto parlato. La considerazione de' prodotti di fattori equidifferenti sembra essere stata quella che abbia destato l' idea di quest' altro sistema di funzioni. L' importanza di questi prodotti nel calcolo delle differenze e delle serie dice Lacroix, fece sentire l' utilità di considerarli più in particolare; quindi di segnarli con una notazione più concisa onde meglio discuterli; e di legarli ad una legge generale costante ed uniforme di formazione, onde più facilmente ricono-

scerne le proprietà. Si venne dunque a portare questo modo di formazione per fattori sul sistema delle serie a differenze costanti. Dal prodotto di un certo numero di primi termini di esse se ne fece in ciascun ordine una specie di funzioni così formate. E siccome quelle del primo ordine, della serie dico a prime differenze nulle, non erano che le potenze semplici; così attesa la similitudine della formazione, quelle degli ordini ulteriori si dissero in genere e per analogia potenze dell'ordine delle serie a cui corrispondevano; in maniera che le potenze dell'ordine m significavano appartenere alla specie di serie ad m differenze nulle. Ma questo punto di vista non era generale perchè legato ad un sistema particolare di serie, a quello delle serie algebriche. Quindi si è venuto in seguito ad estenderlo interamente e portarlo sul sistema fondamentale della scienza: e procedendovi per moltiplicazione come vi si era proceduto per addizione nella genesi delle differenze, se ne venne a formare un genere di funzioni classificate oggi sotto il nome di facoltà; legate fra loro; godenti delle proprietà assai rimarchevoli; e che formano il soggetto di un terzo ramo fondamentale di analisi, già venuto a coltivarsi sotto la denominazione di calcolo della facoltà. A questo riguardo io son venuto a far vedere nel 1772 fra le mani di Vandermonde l'origine di queste funzioni; a mostrarne sul fatto algoritmico la generazione; sentirne la notazione adottata nelle lezioni per significarle; conoscerne la formola generale onde sono per essa rappresen-

tale; rimarcarne infine e distinguerne i diversi gradi nei quali il sistema si decompone, sotto un punto di vista presentandole tendente molto a simplicizzarne la concezione. Dall' esposto ne ho sul campo derivato i quattro teoremi fondamentali dallo stesso Vandermonde annunziati, e che tutte le proprietà analitiche ne racchiudono in generale; teoremi che son venuto ad applicare alla specie più semplice ed elementare che Arbogast ha divisato col nome di fattorielle, e che io mi son ridotto a dire con più gistezza, parmi e ragione, fattoriali; e a rettificare infine son venuto la pretesa idea di sinonimità tra la fattoriale e la *gamma* di Legendre. Considerando la funzione nel suo essere assoluto e relativo del sistema, cioè come una funzione composta *sui generis tantum*, e venire non potendo a quei dettagli che molto a lungo recato mi avrebbero, sono venuto a rinviarne il lettore alla prima nota della confutazione della teoria delle funzioni analitiche, onde aversene in complemento la trasformazione lo sviluppo e la valutazione. Finalmente prendendole sotto la veduta meno generica di potenze di diverso ordine; ed applicando al caso la data formola generale, son finito conchiudendone colla maggior generalità la rappresentanza analitica, non solo per l' intero sistema, ma ancora per le diverse specie di cui si compone.

Dopo questa specie di digressione, necessaria direi perchè sopra un argomento fino dai più classici autori trascurato, io sono ritornato sul soggetto principale della questione, che

alla determinazione riducesi dei differenziali delle differenze e delle facoltà di ordine fratto. L'utilità che può ritrarsi dall'uso de' differenziali d'ordine fratto non avrebbe dovuto farne scordare la considerazione. Leibnizio non mancò di farne menzione. Ma da lui sino al 1800 non sappiamo esservi stato geometra che se ne sia occupato e che ne avesse parlato. Fu sull'albore di cotesto secolo che Arbogast procurò nel suo calcolo delle derivazioni di risvegliarne la dimenticanza, e fissarne degli analisti l'attenzione. Un piccolo cenno per quanto io ne sappia ne ha fatto Lacroix nel terzo tomo del suo trattato di calcolo; ed un semplice rimarco il Laplace nella sua teoria delle probabilità. Intanto il Brunacci stabilendo nel 1802 i principj generali di un'analisi derivata, in genere, ha dato relativamente alle derivate di ordine fratto un teorema generale, che applicato quindi da lui al caso speciale della derivazione delle funzioni differenziali e delle funzioni differenze vi ha conchiuso riguardo alle prime l'impossibilità della loro esistenza, ed alle seconde che bisognava lasciarne indeciso se fossero o no possibili. Tale era lo stato della questione allorchè io venni a parlarne nel terzo volume in discorso: venuto dunque di proposito sopra questo argomento ho fatto vedere l'essere puramente convenzionale de' principj del Brunacci a questo riguardo; e l'irregolarità della conchiusione a cui si era egli in conseguenza condotto: su i differenziali d'ordine qualunque un punto di vista vi ho presentato onde vedere la questione senza che s'incontrasse per

le derivate di ordine fratto in generale la pretesa impossibilità; ed in particolare pel caso de' differenziali e delle differenze, contraddizione alcuna colla natura del rispettivo loro sistema: ho mostrato infine sul fatto analitico e conchiuso che le funzioni differenziali e differenze hanno un essere reale e non sono in generale quantità immaginarie. Questa verità sembra essere stata in seguito ammessa ed adottata: e il Liouville nel 1835 nel giornale della scuola politecnica, e il Serret nelle memorie presentate all' Istituto, son venuti a discussione sulla maniera di considerarle; discussione in cui è quindi entrato il professore Libri. Dopo questa conchiusione avrebbe dovuto venirsi al fatto della valutazione analitica delle tre funzioni in questione, che la proposta interpolazione domandava. Ma io non ho potuto trattenermi più a lungo sopra di questo argomento; e non son venuto sopra di questo fatto che per le funzioni differenziali solamente. Intanto per le funzioni differenze potranno vedersi due lodevoli memorie date in seguito nel nostro giornale lo *Stesicoro* per gli anni 1835 e 1836 dal valoroso giovane geometra D. Giuseppe Zurria, già antico allievo di questa Università, ed ora accordato a me il riposo, divenuto professore nella medesima; e per le funzioni facoltà riscontrarsi il quinto tomo del Dizionario Montferrier delle matematiche alla parola *facoltà*.

Discusso il caso delle equazioni differenziali ordinarie si è passato a quello delle differenziali parziali. Si sa che queste equazioni

sono capaci di tre diversi integrali: del *completo* che abbraccia due costanti arbitrarie in una indipendenza reciproca (parlo sul caso delle ternovariabili), del *generale* che le abbraccia l'una funzione arbitraria dell'altra, e del *singolare* che le abbraccia sotto l'espressione di due funzioni determinate delle variabili. Ho dato la teorica del completo nel secondo volume; quella del generale nel quarto all'occasione di mostrarne l'essere geometrico; e in questo terzo quella del singolare, alla quale son venuto ond'evitare la specie di lacuna che ne sarebbe risultata nelle materie dell'intero corso, e che attesa la natura del processo che vi ho seguito ho potuto inserire e trattare come un uso del completo. Son venuto dunque a metterne primamente sottocchi la natura analitica: ad assegnarne dappoi le condizioni sotto le quali si verifica con delle formole che mi appartengono: ho ridotto queste formole a quelle di condizione date alla sua maniera dal Brunacci per la sua esistenza. Quindi rimarcando come il processo condotto sull'equazioni ternovariabili si estende a quelle di un numero maggiore e agli ordini al primo superiori, ho conchiuso mostrandone con un esempio ai casi particolari l'applicazione.

Conchiuso quanto dovea dirsi sugli usi delle equazioni differenziali a variabili dipendenti, io son passato alle equazioni a variabili indipendenti, non considerandone la questione che nel problema de'massimi e minimi dalla banda della pura analisi, e riservandone la considerazione

geometrica pel quarto volume. Seguendo dei metodi ragionati con assai di laconismo, le materie disponendo coll'ordine il più logico e stretto, l'allocuzione conducendo con brevità, mi è venuto di riunire in poche pagine tutto quello direi che di essenziale insieme e di generico si ha in una materia sì severa e incompleta, severa tanto e incompleta che lo egregio Cav. Brunacci dopo averne prodotto il trattato più esteso ei dice che se ne ha, asserisce con candidezza di crederlo non mancante di difficoltà, e di non mancarne egli stesso. Il renderne conto a minuto mi condurrebbe più a lungo di quanto alla presente discussione compete. Onde dico soltanto così di fuga che dopo esservisi riandato il principio filosofico della questione, si è venuto ad applicarlo alla questione proposta de' massimi e minimi in genere, e a decifrarne l'essere analitico rispettivamente al caso dei differenziali ordinarj e a quello delle variazioni: quindi a discuterne si è venuto il primo caso in generale per le funzioni di un numero indeterminato di variabili e in complemento di quanto se ne era detto nel primo volume, e ad applicarne i risultati alle funzioni binovariabili: dappoi al secondo si è passato relativo all'ipotesi delle variazioni. Intanto le funzioni possono esservi finite, differenziali o integrali: per le finite se ne era parlato nel primo volume; e fatto riflettere che quanto se ne era ivi detto sulle binovariabili alle moltovariabili poteva estendersi, si è venuto sul caso delle differenziali. Guardando il caso sotto tutti

gli aspetti, ho proceduto con applicarlo ad un problema particolare che non era stato finallora proposto e trattato che sul fatto geometrico; che io ho presentato e discusso nelle forme analitiche in tutta l'estensione di cui è capace; e che ammettendo due soluzioni distinte non si era anteriormente tenuto conto che di una soltanto. L'ultimo caso in cui la funzione fosse un integrale indeterminato venni in seguito a trattarvi.

Ho diviso tale questione in due parti; quella nella quale la funzione è a variabili indipendenti, e quella in cui ne ammette inoltre delle dipendenti. Si soddisfa alla prima parte nella maniera la più generica: vi si cercano ed assegnano le relazioni necessarie fra le variabili onde l'accidente abbia luogo: quelle vi si definiscono relative al criterio che ne determinano la specie: due esempj vi si producono onde illustrarne appieno col fatto la proposta analisi. Quindi si passa alla seconda parte: se ne fissa la differenza dalla prima: se ne dà un'idea tutta generica onde farne sentire l'estensione e l'impossibilità in cui siamo di risolverla non solo in generale, ma con viste eziandio assai ristrette e speciali: se ne mostra infine sul fatto del caso più semplice della composizione della funzione l'essere analitico.

Venni dopo questa discussione all'uso dell'integrazione nelle equazioni a differenze, prendendovi di mira due rimarchevolissimi oggetti; la somma delle serie, e l'analisi del caso e delle probabilità, che vi sono intima-

mente legati. Incominciando ho richiamato in primo luogo il teorema fondamentale che nel secondo volume sotto il numero (135) si era dimostrato, e che venni mettendolo sotto una forma propria all'applicazione; teorema mercè di cui conosciuto il termine generale di una serie e il suo integrale *sigma* se ne ha immediatamente il sommatorio. Ma la difficoltà di assegnare cotesto integrale ci dimostra quanto poco debba essere avanzata la soluzione generale di questo problema. Io dunque ho preso a condurre con vedute proprie la questione, onde darle tutta quella generalità di cui mi è sembrata capace nell'attuale periodo della scienza. Ho preso a considerare le serie nel loro essere primitivo, in cui non ci si presentano che sotto l'aspetto di serie ricorrenti. Ho rappresentato in genere il sistema di queste serie per un'equazione a differenze: ed assumendo un'equazione cosiffatta di ordine indeterminato, vi ho esposto i due metodi generali attualmente conosciuti, l'alembertiano cioè e il lagrangiano; e l'integrale rispettivo ne ho portato. Applicando quindi a questi integrali il predetto teorema, ho dato sotto l'una e l'altra espressione la rappresentanza generale del termine sommatorio. E dopo avervi prodotto delle osservazioni proprie a fissare l'indole relativa dei due termini generale e sommatorio, e definita la loro dipendenza reciproca, son venuto illustrando il tutto con quattro notabilissime applicazioni: ai fattoriali; alle serie a differenze costanti; ad un sistema di serie da un'equazione a coefficienti costanti

di terzo ordine rappresentato ; ad un genere di serie da un equazione significato a coefficienti variabili: applicazioni che si sono condotte con processi elevati e proprj dell' essere trascendente del caso; che a delle considerazioni rimarchevoli hanno portato sulle teoriche rispettivamente concernenti; che delle proprietà han fatto rilevarvi forse non prima conosciute; che sino all'ultimo passo, alla esemplificazione numerica, si sono prodotte.

Contemplato il primo de' due proposti soggetti si è venuto al secondo, all'analisi del caso e delle probabilità. Entro in questo argomento stabilendone i principj filosofici e le formole fondamentali; e quindi proponendovi due questioni a risolvere; l'una assai strana, relativa ai giuochi di sorte ed azzardo; l'altra molto sublime ed astratta, alle deliberazioni de' corpi morali. La prima che da più equazioni fra le variabili dipende, e che ha per oggetto di definire se preso a caso da un sacco un pugno di monete debba riuscire pari o impari, l'ho risoluta col noto metodo di eliminazione insieme e d'integrazione. E la seconda che da equazioni a differenze parziali di secondo ordine dipende, che per quanto io ne sappia non finallora sottomessa al fatto analitico, e che il Laplace solo vi ho veduto razionalmente interloquire sul proposito delle decisioni nelle cause criminali, è stata da me trattata e risoluta con un processo non prima convenientemente usato e seguito: in effetto posta in equazione la questione son venuto sottomettendola al metodo generale concernente d'in-

tegrazione del Lagrange, e ad assegnarvi la rappresentanza analitica della probabilità relativa alla giustizia della decisione: prodotte alcune rimarchevoli osservazioni sul carattere analitico di essa, son passato a determinarvi la costante arbitraria: e venuto sul concreto per fissarne il criterio morale, son finito applicandola ad un caso speciale, e con produrvi diversi rimarchi razionali sul modo specolativo di vedere e di condurre questa specie cotanto varia ed astratta di questioni.

Dopo gli usi dell'integrazione delle equazioni a differenze non restava per compimento della presente lezione che quello delle equazioni mescolate, a differenze-differenziali. Ma questo ramo di analisi molto utile nella rappresentanza analitica delle questioni geometriche e di uso tanto apprezzabile nella teorica delle serie, non ha incominciato che di recente ad essere per mano di Condorcet e Laplace coltivato. In tanta vicinanza di origine, e di deficienza di conoscenze, dopo averne dato in conchiusione del secondo volume un saggio elementare, son venuto producendo in questo terzo l'uso più marcato che se ne è forse fatto e che se ne conosca; quest'uso puramente analitico che riguarda il caso più severo e sublime delle equazioni in discorso, quello a differenze-differenziali parziali, non ha per oggetto che la ricerca delle radici delle equazioni per approssimazione. La sua dipendenza da un problema concernente di analisi, mi ha portato alla soluzione generale di esso: e questa soluzione dall'integrazione dipendendo da

un' equazione della specie di cui si tratta, ha fatto che io avessi da essa incominciato. Infatti venni primamente con un metodo assai sottile all' integrazione rimarchevole di cotesta equazione. Giovandomi della somma integrale che ne avea trovato, son venuto a dare la soluzione generale del predetto problema, e ad averne un risultato in serie. Semplicizzando replicatamente l' espressione di questo risultato mi son fatto a ridurla a quella della serie concernente che se ne deve a Lagrange il ritrovato. Applicando infine questo risultato così ridotto alla ricerca proposta delle radici di una equazione di grado indeterminato, son pervenuto ad una serie che per portare la questione sino all' ultima sua considerazione, ho sul caso portato delle equazioni di secondo grado.

Per compire la discussione del presente volume resta ancora a parlare degli usi aritmetici dell' integrazione, soggetto della sesta lezione. Per quest'oggetto si è venuto con una specie d' introduzione prevenendo che questa seconda parte dell' assunta discussione non può portare come la prima la medesima classificazione di dire: la deficienza delle dottrine che la riguardano non permette di distribuire gli usi in questione corrispondentemente alla triplice divisione delle equazioni a differenziali, a differenze e a differenze-differenziali, e ci obbliga ad un dire breve e ristretto. Non si è lasciato però di produrvi colla solita e dovuta chiarezza filosofia e laconismo dei pezzi rimarchevoli e sublimi. Ho dato 1° un saggio delle risorse proposte dal Laplace per la valutazione

approssimata delle funzioni da grandi numeri dipendenti: 2° la riduzione finale della rappresentanza analitica de' coefficienti dello sviluppo delle potenze dei polinomj: 3° alcune ricerche sulla teoria dei numeri. In effetto 1° nell'analisi delle probabilità s'incontrano di frequente delle funzioni che per la loro valutazione esatta domandano de' calcoli numerici sì lunghi e prolissi che riesce impossibile di conchiuderla col fatto: tali sono quelle funzioni in generale composte di un gran numero di termini e di fattori: tali sono gl'integrali eureliani in particolare quando gli esponenti in essi contenuti sono molto grandi. Quindi fa bisogno in tale caso di ricorrere all'approssimazione. Laplace fra le memorie dell'Accademia Reale delle Scienze per gli anni 1778 e 1782 ha dato un metodo utile per soddisfarvi. La valutazione delle funzioni nel caso in questione può considerarsi come riducenda a quella degl'integrali de' prodotti di fattori ad alte potenze elevati. Questo punto di vista di cui ho dato io ragione, portato dal Laplace nel suo citato metodo, lo ha nella seconda parte della sua teoria della probabilità condotto a rappresentare cotesti integrali con delle serie di una soddisfacente approssimazione, serie che ha in seguito applicate fra gli altri oggetti a quello di che si tratta. Non potendo entrare in tutti gli usi che il celebre autore ha fatto del pezzo concernente, e in tutti i dettagli ai quali è venuto, io mi sono limitato ad esporne con ragione ed analisi le idee fondamentali: e rimettendo onde il tutto vederne alla citata *Teo-*

ria, son venuto a mostrarle sul fatto analitico di una trascendente, di cui gl' integrali euleriani di prima specie sono un caso particolare.

2° Dopo tante ricerche sullo sviluppo delle potenze dei polinomj fu Giacomo Bernoulli il primo che venne a darci una legge generale onde i coefficienti vi progrediscono. Ma il suo metodo mancava della necessaria e dovuta semplicità. Quindi il Fontana e dopo di lui dalla sua banda il Lagrange, ne diedero mediante l'uso più ordinario del calcolo differenziale una assai semplice: ma essi si arrestarono a rappresentarvi quei coefficienti l'uno dipendentemente da tutti gli altri precedenti, come abbiamo nella discussione del primo volume rimarcato; rappresentanza che in seguito l' esimio Pr. Guglielmo Libri è venuto per la prima volta a portare sino all' ultimo tratto della sua espressione analitica; quella cioè di darli indipendentemente l'uno dall' altro, e solo da quelli del dato polinomio dipendenti. Su questo proposito io son venuto esponendo alla mia maniera il processo di questa riduzione finale, permettendomi dei segni proprj e speciali al caso, onde rendervelo più semplice e simetrico; tenendo conto di una condizione che nel processo libriano non ritrovava e senza la quale quel resultato non si avrebbe; e producendo per la loro rappresentanza una formola simbolica simile a quella che il prelodato geometra ne avea dato ma sotto altra espressione, formola che in conchiusione ho dietro a lui applicato alla divisibilità dei numeri, e che nonostante

lasciata nella generalità non hò mancato di procurarvi la maggiore espressione e chiarezza.

3° Due oggetti si sono presi a considerare in quest' ultimo articolo di questa lezione: l' uno relativo alle proprietà de' numeri primi; l' altro ad un principio fondamentale della teoria de' numeri. Invero si richiami in primo luogo che i numeri primi sono così irregolari e difficili a riconoscersi che non si sono nè si potranno forse mai legare ad alcuna legge analitica onde rappresentarne il sistema, e le proprietà generali condurne. Nonostante questa mancanza non si è lasciato di scoprirvi però in particolare un gran numero di proprietà, fra le quali io ho posto in discussione la legge onde rappresentare nel loro procedimento naturale il numero dei termini dal primo sino ad un limite dato, e il teorema di Wilson. Legendre rapporta una formola emperica rappresentante cotesto numero di termini: ed io son venuto dimostrandola colle risorse del calcolo sublime; portandola sino al fatto numerico, ed applicandola alla somma della serie reciproca di essi. Il teorema di Wilson deriva da quello di Fermat, uno de' principali dice Legendre sopra i numeri primi. Lagrange è stato il primo a dimostrarlo: e l'Eulero e Laplace vennero in seguito ad occuparsene. Io ho dato la dimostrazione di questo rimarchevole e famoso teorema uso facendo della teorica delle differenze, e che ho conchiuso con un rimarco utile alla tecnica sua considerazione. Dopo ciò sono passato al secondo oggetto, al principio generale della teoria dei

numeri. Questo principio proposto dal professore Libri è fondato sopra il punto di vista che qualunque ricerca della teoria dei numeri non si riduce che alla risoluzione in numeri interi e positivi di un'equazione indeterminata a coefficienti numeri interi; punto di vista che io son venuto dapprima a fissare sulla ragione, e di poi sopra di esso mirando son venuto dietro l'idea dell'esimio citato professore alla dimostrazione dei due teoremi fondamentali ai quali riducesi. Quindi producendo qualche difficoltà che si presenta allorchè si viene sul fatto dell'applicazione, e rimettendo alla memoria dell'autore ho posto termine a questa sesta lezione, e il terzo volume conchiuso.

QUARTO VOLUME
(Tomo terzo parte seconda)

Sulla settima lezione della metodologia inversa della matematica sublime versante sugli usi geometrici dell' integrazione.

Gli usi geometrici dell' integrazione formano il soggetto di questo quarto ed ultimo volume. Sotto di questa enunciazione si sono raccolti come in sistema una moltiplicità di opuscoletti più o meno estesi secondo che il caso richiedeva. Questi opuscoletti concernenti l' alta geometria relativamente al calcolo sublime, si sono disposti nel sistema ad ordine di materie sotto la stessa classificazione analitica delle equazioni, onde lo sono stati nella quinta lezione a riguardo degli usi algebrici: trattano essi delle materie più recenti e sublimi: i metodi vi si conducono con maniere sempre *a priori* e dirette: dei processi sempre vi si danno ragionati e brevissimi: un dire infine vi si sostiene che quantunque geometrico, sempre all' immaginazione diretto e non all' occhio colle figure, che nel caso in discorso delle false idee comunicherebbe, e che

coll' istessa immaginazione rettificare dovrebbonsi. Posta questa specie di preliminare dopo una breve e rapida introduzione io sono entrato in materia.

Nella settima lezione del primo volume non si era ristretta la discussione degli usi di cui si parla che alla geometria a due dimenzioni nei suoi rapporti col calcolo diretto. Quindi per completarla nella generalità del dire, io son tornato sopra di essa, ed assunto come in una specie d' introduzione ad estenderla a quella a tre dimensioni. Per non dare dunque al seguito di questa discussione la divisa di una digressione son venuto presentandola in fronte del volume, pria che fossi venuto sul fatto della proposta classificazione delle equazioni ; e con delle applicazioni conchiudendola alla teorica delle integrazioni delle funzioni.

Per soddisfare a questo assunto io mi son fatto a considerare le superficie curve similmente alle piane sotto un doppio punto di vista, quello dico del loro paragone e delle loro individuali proprietà. Il paragone non si riduce che alla considerazione dei loro contatti, e la ricerca delle loro proprietà individuali che a quella delle loro quadrature e delle cubature de' volumi che inviluppano. Sul proposito dei contatti procedendo sempre sulle vedute lagrangiane, io son venuto dapprima a produrvi alcune obbiezioni mosse dal Cauchy contro le medesime; a richiamare presente la nuova teoria da questo illustre analista proposta, a farne sentire l' insufficienza, e a dare di quelle obbiezioni la soluzione. Quindi son venuto a pre-

sentare il punto di vista onde deve guardarsi l' accidente del contatto in discorso; punto di vista, ho fatto rimarcare, di cui potrà molto giovarsi a prevenire la maggiore delle predette obbiezioni: vi ho io dato le condizioni analitiche che ne classificano i diversi ordini; applicato la preesposta teoria alle due importanti ricerche del piano tangente e della sfera osculatrice ; determinato infine le circostanze che ne caratterizzano la prima, e l' impossibilità di recarne in generale ad effetto la seconda.

Le curve a doppia curvatura considerate nel fatto dell' intersezione di due superficie curve non sono rappresentate analiticamente che dalle equazioni di esse. Quindi dopo aver mostrato così di passaggio come la teoria del loro contatto si deduce per mezzo di questo principio dall' anzesposta per le superficie curve, son venuto a considerarne il caso speciale delle tangenti e del cerchio osculatore, a darne la rispettiva rappresentanza analitica, e a presentarvi la generazione delle evolute che al secondo caso appartengono.

Per la quadratura delle superficie curve avrebbe potuto applicarsi come il Brunacci lo ha fatto, il metodo lagrangiano da noi seguito nel volume primo per la rettificazione e quadratura delle curve piane: ma l' amore di essere sempre facile e breve altra strada mi ha fatto tenere. Il metodo dei piani coordinati ortogonali è il metodo ordinario onde oggi si eseguiscono le ricerche dell' alta geometria. È a questo metodo che io ne ho appoggiato quella di cui si tratta. Quindi ad un sistema di

tre piani siffatti la superficie in discorso rapportando coll' immaginazione, son venuto con un processo ragionato semplice spedito ad assegnarne l' integrale doppio che in generale la rappresenta. Con un processo simile ragionato sempre e con maniere analitiche lagrangiane sempre condotto, son arrivato in seguito determinando la funzione integrale che la cubatura esibisce del volume dalla medesima compreso. E finalmente il rimanente caso della rettificazione e quadratura delle curve solide trattando come corollario direi delle curve piane , son venuto a darne la rispettiva rappresentanza analitica. Recata a fine così la discussione proposta a riguardo del calcolo diretto, son passato a mostrarne qualche uso nel calcolo inverso, nella teorica dico dell' integrazione delle funzioni. Il problema conosciuto sotto il nome di *Enimma fiorentino*, proposto e risoluto per la prima volta dal Viviani , e dall' Eulero molto discusso , è stato il primo uso che io presi a farvi. In questo problema celebre non si domanda che di aprire in una volta emisferica quattro finestre tali che la superficie restante riuscisse quadrabile. Posto dunque in frasi algoritmiche il quesito son venuto assegnandovi l' integrale doppio dalla di cui determinazione fra dei dati limiti la soluzione dipende. Intanto nella ricerca de' valori definiti degl' integrali doppj s' incontrano dei casi nel trattamento dei quali bisogna avere dei riguardi particolari, e la di cui trascuranza ha fatto alle volte cadere taluni geometri dice il Brunacci in gravi errori. Quindi ho cre-

duto pria d' inoltrarla produrre a questo proposito alcune osservazioni, che portando in seguito convenientemente all' applicazione del caso, sono arrivato a condurla sino al suo termine, ed ottenerne un risultato assai curioso dice Lacroix, che addimostra il trilineo rimasto del quadrante della volta sottraendovi la chiesta finestra, eguale come il Viviani ha trovato, al quadrato del suo raggio. Un secondo uso ancor più generale ho fatto delle trovate formole nell' enunciazione del medesimo problema, quello della ricerca della solidità dell' istessa volta emisferica; ricerca che ho eseguito derivandola da un caso più generale, dalla formola cioè rappresentante il volume di un solido formato da quattro piani normali sulla base orizzontale della volta innalzati, e che vanno in essa a finire; ricerca dico che ho sino all' ultimo risultato condotto, conchiudendo sul concreto la cercata solidità. Un terzo uso finalmente ho prodotto delle formole generali in questione nella ricerca della superficie d' una cupola di forma primitiva, avente cioè per centina la catenaria; e che geometricamente presa dalla rivoluzione sul proprio asse di una curva siffatta è generata; uso in cui particolarizzando la formola generale al caso dei solidi di rivoluzione competente, sono arrivato a quella data direttamente nel primo volume citato delle lezioni, e quindi per essa a rappresentare in serie ordinata a potenze pari ed ascendenti del raggio della base la superficie in questione della cupola.

Dopo questa specie d' introduzione tenden-

te a completare sotto il preso punto di vista di usi dell' integrazione la teorica delle curve e delle superficie curve in detto primo volume incominciata, son passato al fatto delle applicazioni proposte, che ho condotto sotto la triplice classificazione già adottata delle equazioni. Incominciando dal mettere sottocchio il piano del mio dire e dalla considerazione delle equazioni a defferenziali ordinarie, mi son fatto a mostrarvi primamente la significazione geometrica dei loro integrali completo e singolare. Ed attesa la restrittezza delle conoscenze attuali nella geometria trascendente, non potendo soddisfarsi all' assunto che mostrando con qualche esempio il modo di condurvisi nei diversi casi che occorrer potranno, io ho preso a trattare il problema delle trajettorie; problema celebre nell' origine dei nuovi calcoli, proposto da Leibnizio per tastare il polso ei dicea ai geometri inglesi, discusso sempre all' ingrande dall' Eulero, e da tutti i moderni quasi rapportato. Dopo averne dato la soluzione generale son venuto ad applicarla alla ricerca delle trajettorie delle linee di secondo ordine, onde darne a vedere tutte le operazioni e i dettagli in particolare; applicazione che ho conchiuso mostrando in ciascuna delle linee componenti il sistema di cotesto ordine, l' indole della sua rispettiva trajettoria.

Un' altro problema analogo al precedente ha risoluto pure il Leibnizio; problema che ci dà a vedere l' origine degl' integrali singolari risalire all' epoca stessa del calcolo integrale, e una conoscenza di fatto ci porge del carat-

tere che li distingue dai completi. A questo proposito ho io incominciato dal dare un'idea filosofica e fondamentale della rappresentanza geometrica di un' equazione ne' suoi rapporti colla variabilità delle costanti arbitrarie; considerato come un'equazione integrale; e che per fissare l'indole della questione ho particolarizzato sul caso delle equazioni binovariabili con un' arbitraria o parametro: ne ho quindi considerato la significazione quando quest' arbitraria vi è costante e quando variabile, cioè quando l'equazione rappresenta un integrale completo o singolare; ed ho posto così sottocchio il nodo geometrico onde questi due integrali sono tra loro legati. Data questa fondamentale e filosofica conoscenza della questione son venuto alla soluzione del problema proposto; che ho condotto dapprima alla mia maniera, e dappoi alla maniera meno diretta e generale onde vi ha il Leibnizio proceduto. Questo geometra ha preso per data della sua soluzione l'essere geometrico stesso dell'equazione che dovea definirsi, e che io in effetto ho definito direttamente e *a priori*. Egli punto non giovandosi delle risorse del calcolo di sua invenzione, venne immediatamente sopra una equazione finita per mezzo della quale arrivò a quell'altra che dà la soluzione del problema: e punto non fissandosi sulla prima che un'altra soluzione distinta ne dava, e che nel processo da me seguito l'integrale completo vi significava, mancò di riconoscervi la dopplicità delle soluzioni di cui il caso era capace. Del pari il Bernoulli nella soluzione che diede

di questo problema punto non riconobbe siffatta singolarità di calcolo, che il Taylor in seguito sospettò, che Clairaut e il P. Riccati notarono, a regola sottomise l'Eulero, che il Laplace direttamente trattò, e il Lagrange infine legò ad una teoria generale. Per marcare con distinzione e chiarezza la dupplicità delle due soluzioni di cui le equazioni in discorso possono esser capaci, io ho preso a risolvere un altro problema a tale oggetto ordinariamente proposto da' trattatisti. In ciò fare io ho proceduto assumendo un problema più generale, che oltre il proposto un altro ne abbraccia; e ho dato così in una volta la soluzione di due problemi che non si erano sino allora trattati che divisamente e come se l'uno indipendente dall'altro. Posto dunque in equazione il problema ne ho cercato la soluzione analitica: e condotto al doppio risultato di un integrale singolare e di uno completo, ne ho notato di entrambi la rappresentanza geometrica rispettiva e il gruppo onde si annodano. Quindi particolarizzato il caso generale a quello del proposto problema, ne ho avuto come un corollario il risultato ad esso competente: e indi lasciando di oltrestendere la discussione geometrica sulle equazioni differenziali ordinarie, son passato a quella sulle differenziali parziali.

Su questo proposito io non mi sono fissato che alla significazione geometrica assoluta e relativa dei tre integrali completo, generale e singolare di che esse sono capaci. La considerazione intanto di cotesta significazione trova in quella del contatto delle superficie da' pre-

detti integrali rappresentate, la sua vera e fondamentale risorsa. Dopo averlo dunque contestato con delle osservazioni concernenti, mi sono rapportato alla teorica di questo accidente per soddisfare all' assunto. Il problema che cotesta teorica si propone di risolvere non si riduce in sostanza che data una curva o superficie curva determinare l' essere del suo contatto con un' altra del pari data, o viceversa determinare la curva o superficie curva che gode con un' altra data la proprietà di un contatto dato. Il primo caso che forma il problema diretto de' contatti, è stato da me discusso nel primo volume, ed in complemento sul fronte di questo quarto: e il secondo che il problema inverso ne forma, è quello a cui si rapporta la questione presente. Quello non dipende che dall' analisi immediata delle equazioni differenziali date dalle sue condizioni: e questo dal loro integrale; integrale che apparterrà ad equazioni binovariabili se il contatto proposto sarà tra curve piane, ed a ternovariabili parziali se sarà tra superficie curve. Il primo di questi due casi dunque verserà sulla significazione stessa che ho precedentemente ed altrimenti discussa, e che per rendere completo nel presente assunto l' uso di questa teorica son tornato con essa a trattarlo come una specie di preliminare. Quindi prendendo la cosa con tutta la generalità, ne ho limitato la discussione al semplice contatto di primo ordine, non estendendola agli ordini ulteriori perchè molto e sempreppiù astratta e complicata ne riuscirebbe. Son venuto in seguito per la sua maggior chiarezza ad il-

lustrarla con un esempio conducente alla linea retta, inviluppante di una famiglia di ellissi o iperbole: e in conchiusione per darne a vedere come le avanprodotte considerazioni venivano immediatamente ad applicarsi alle questioni di geometria, mi son fatto ad usarne per la dimostrazione di un teorema dato da Apollonio nelle sue coniche, e sono arrivato al medesimo risultato a cui è pervenuto il Brunacci dimostrandolo diversamente. Son passato quindi al soggetto principale della proposta significazione, dell' essere dico de' tre integrali completo generale e singolare come in un gruppo annodati in una equazione a differenziali parziali. Questa ricerca può avere un oggetto puramente analitico o analitico geometrico. Nel primo caso l' equazione può essere come a tre così ad un maggior numero di variabili, nel mentre che al secondo una di tre esclusivamente ne compete. Guardando dunque la questione con questo punto generico di vista, io son venuto fissando il soggetto della discussione sulle ternovariabili come il caso più semplice in generale e insieme competente all' uno e all' altro oggetto della significazione in questione. Intanto per caratterizzarla nel fatto geometrico bisognava conoscerla in quello analitico che ne è il fondamento e il principio. Quindi è che io venni dimostrando in primo luogo l' essere e la connessione analitica dei tre integrali di cui si tratta. Ne avea io parlato nel volume precedente ma non a sufficienza pel presente caso. Venni dunque parlandone più di proposito: E fissandone per

maggior chiarezza il dire su d'equazione di argomento particolare, son venuto conchiudendovi che i tre integrali di che si parla analiticamente considerati, non sono che una medesima funzione determinata delle variabili con due costanti arbitrarie: funzione che presa isolatamente soddisfa all' equazione differenziale parziale a cui appartengono quale integrale completo; coesistente con un'altra rappresentante una dipendenza indeterminata fra le due costanti, vi soddisfa quale integrale generale; e coesistente con altre due determinanti sotto delle condizioni date coteste costanti in funzione delle variabili, vi soddisfa quale integrale singolare. Posta questa conoscenza sull' essere analitico del sistema dei tre integrali, io son passato a riconoscerne l'essere geometrico. Ciascuno di questi integrali non è che la rappresentanza analitica di una certa superficie curva: quindi la ricerca dei loro rapporti geometrici non si riduce in sostanza che al paragone delle superficie che essi significano. Il paragone delle superficie non è intanto che l'oggetto della teoria de' contatti. Dunque sotto questo punto di vista prendendo la questione, io venni a propormi il problema di un contatto di primo ordine tra la superficie dell'integrale completo supposto dato con una d. equazione indeterminata; e a condurne la soluzione sulle equazioni condizionali stabilendola di un contatto siffatto. Quindi assumendo dapprima per l'equazione indeterminata l'integrale generale e dappoi il singolare, e dalle conchiusioni a cui sono arrivato raccogliendo,

son venuto in ultimo risultato a conchiuderne che la significazione geometrica di cui è parola, presa in tutta la sua indefinita estensione, non si riduce che a rappresentare in sistema una famiglia di superficie curve per parte dell' integrale completo, una di curve a doppia curvatura per parte dell' integrale generale, ed una di semplici punti per parte del singolare; e ciò con tale legamento e rapporto che la prima classificata sotto la legge della equazione condizionante l'una delle due costanti ad una dipendenza indeterminata dall' altra, produce colle mutue e continue intersezioni dei suoi individui la seconda, e classificata sotto la condizione delle due equazioni onde coteste due costanti riescono determinate in funzione delle variabili, ne esibisce la terza che la seconda interseca ed abbraccia, nel mentre che la equazione a differenziali parziali a cui esse appartengono rappresenta il sistema generale di questo loro gruppo di accidenti ed incontri.

Gl' integrali di che si tratta potrebbero nella generalità delle idee, appartenere ad una equazione a differenziali parziali di ordine superiore. Quindi si presenta l' idea di passare per la completa discussione a quest'altro caso; e di potervisi procedere con maniere simetriche e simili. Ma facendoci più da vicino a contemplare sul fatto la questione, la cosa non riesce così. Volendosi entrare in un modo siffatto di ricerca dovranno incontrarsi delle difficoltà semprepiù grandi e difficili come l'ordine s' innalza; e cadersi con un dire semprepiù complicato ed astratto in conchiusioni sem-

prepiù tenebrose ed oscure; anzi direi piutosto nell' attuale periodo, trascendenti del tutto. La teoria di coteste equazioni dice Lagrange è ancora imperfettissima. Noi conosciamo sì incompletamente l' essere analitico de' diversi integrali di cui sono capaci, che non saprebbe camminarsi alla ricognizione del luogo geometrico di un' equazione siffatta mercè di essi come vi si è camminato per quelle di primo ordine; e che bisogna altra strada seguire da essi indipendente onde potervi riuscire. Così ha l' illustre Monge proceduto nella sua *Applicazione dell' analisi alla geometria*, discutendo la generazione delle superficie a cui il presente assunto rapportasi. Cercandone le equazioni nel modo onde sono generate o nelle loro proprietà, è venuto senza essenzialmente dipendere dalla conoscenza di quegl' integrali a rappresentarne le une reciprocamente nelle altre. In questo stato di cose dunque non potendo oltreprocedersi col preso punto di vista sull' assunta significazione, dopo averne fatto rimarcare così di passaggio le difficoltà, sono immediatamente venuto ad esemplificarne la discussione che prodotto ne avea relativamente al primo ordine.

A tale oggetto ho preso a risolvere un problema simile al generale precedentemente discusso: data dissi l' equazione di un piano e la relazione fra i due parametri coefficienti di essa, trovarne quella della superficie curva che gode con esso la proprietà di un contatto indeterminato di primo ordine. Qnindi conducendone la soluzione passo a passo della pre-

cedente generica, vi ho conchiuso che l'integrale generale non significa nel caso proposto che un sistema di linee rette risultante dalle mutue e continue intersezioni di una serie di piani significati dall'integrale completo, e che il caso non ammettendo integrale singolare, non comporta che il sistema semplicemente di due superficie, il quale guardato nella sua essenziale costituzione si vede rappresentare la cosiddetta superficie cilindrica a direttrice indeterminata.

La considerazione dello spigolo di regresso ha detto il Monge nella testè citata opera, è di una grande importanza nel calcolo integrale delle equazioni a differenziali parziali, e per questa ragione ei si è dato a studiarlo in tutti i casi su i quali è venuto. Intanto io non ne avea fatto parola che come significanza dello integrale singolare nella considerazione dei suoi rapporti coll' integrale completo in una maniera da esso dipendente direi e suballerna. Per dare dunque una nozione sul modo di cercarle direttamente dopo alcune considerazioni generali sulla sua teoria, io mi feci ad applicarle alla soluzione analitica del problema che veniva tosto di conchiudere razionalmente. Formando perciò le equazioni concernenti del caso, venni rimarcando che il tutto si riduceva a particolarizzarvi le considerazioni generali prodotte nel secondo volume a riguardo della determinazione delle funzioni arbitrarie delle equazioni a differenziali parziali. Venni quindi all' effetto di cotesta particolarizzazione. E per maggior chiarezza della discussione ven-

ni conchiudendola col portarla in ultima esemplificazione sulla superficie cilindrica a direttrice circolare.

La significazione geometrica che si veniva di discutere indirettamente conducendola come un'applicazione delle teoria de' contatti, avea portato sulla considerazione delle superficie inviluppanti. Ma non si era presentato in questa discussione il significato dell' integrale generale che similmente al singolare, ne' suoi rapporti col completo e come ad esso legato e subalterno. Questo modo di discussione non soddisfaceva in generale all' assunto che parzialmente, in quanto non si versava che sulla ricerca de' rapporti geometrici de' tre integrali, e non mai della loro significazione individuale ed assoluta. Or la significazione assoluta ed a se indipendente esisteva nell' istesso detto modo di discussione a riguardo dell' integrale completo; e quella a riguardo dell' integrale singolare si era data colla ricerca individuale ed assoluta dello spigolo di regresso. Quindi non restava a darsene che quella a riguardo dell'integrale generale. Questo è quello a cui si venne immediatamente dopo nel nostro testo. Assumendo l'equazione analitica che lo rappresenta nel suo essere assoluto, e l'analisi sul fatto geometrico conducendone, si è venuto a darsene la vera costruzione diretta e a se indipendente; a riconoscerne l'immediata e sua piena significazione come antecedentemente nelle superficie inviluppanti; e a caratterizzarlo quale principio analitico delle superficie dei canali ed asse piano, principio che potendo

quest'asse sempre piano essere una linea aperta qualunque, una linea retta, una linea rientrante e continua, potrà appartenere in generale alle volte canali qualunque ad asse tutto in un piano, e in particolare alle volte cilindriche e alle volte annulari. Quindi per portare semprepiù sull'applicazione del fatto la discussione, si è venuto a risolvervi il problema della generazione speciale del canale in cui la superficie generatrice fosse una sfera col centro sull'asse di movimento 1° di raggio variabile ed asse curvilineo, 2° di raggio costante ed asse rettilineo: problema discusso con altre maniere da Monge, e dietro a lui dal Brunacci.

Il caso de' canali ad asse piano che si veniva di considerare non formava il caso generale di questa famiglia di superficie inviluppanti. Un'altro più frequente ad incontrarsi nel fatto delle applicazioni, più complicato e generale ve ne ha, che è quello delle superficie canali ad asse a doppia curvatura. Di quest'altro caso essendo implicito alla medesima analisi della significazione degl' integrali in questione, conveniva per renderne semprepiù completa la discussione che se ne fosse parlato di proposito. Io dunque sono immediatamente venuto sopra di questo altro caso: ne ho fatto nella natura analitica della stessa discussa questione rimarcare l' esistenza: la differenza dal caso precedentemenre contemplato ne ho fatto vedere: guidato sempre da uno stretto e rigoroso ragionamento il principio analitico onde si fonda ne ho rilevato: l' analisi geometrica in seguito ne ho condotto: e a conchiuderne

sono arrivato a suo riguardo un modo di generazione simetrico a quello del primo caso; a conchiuderne dico la generazione del movimento di una superficie unica strisciante con un punto dato sopra una curva a doppia curvatura. Son passato di poi ad illustrare questa dottrina colla soluzione di un problema simile al precedente, quello cioè in cui la superficie generatrice è una sfera di raggio variabile, mobile col suo centro sopra una direttrice a doppia curvatura; problema che il Monge nel suo lavoro originale testè citato, e il Brunacci che ne ha passo a passo seguite le pedate, non hanno risoluto che con delle vedute prese dall' istesso fondo speciale della questione. E finalmente per portarne la soluzione sino all' ultima conchiusione la ho applicato a tre questioni assai scabre e rimarchevoli dell' arte di fabbricare che questi illustri geometri non avevano risoluto che con un processo assai diverso; cioè alle tre questioni delle colonne torse, delle scale a chiocciola e delle volte lunette.

La Voltilogia è la teorica la più incompleta tuttora e intrigata dell' arte di fabbricare. La classificazione delle diverse specie di volte tanto relativamente alla loro forma quanto alla loro costituzione; la loro rispettiva generazione; la loro misura; la loro stabilità sono gl' importanti argomenti onde si occupa. Le nostre conoscenze a questo riguardo sono ancora assai imperfette e mancanti. Intanto la classificazione e la stabilità, quella non mirando di proposito che l' architettura e questa la sta-

tica, non formavano un oggetto di competente discussione per le nostre lezioni: inoltre sul principio di questo stesso volume colla quadratura dolle superficie e cubatura dei volumi si erano date le risorse fondamentali, che la voltimetria ritrova negli usi geometrici del calcolo sublime ; quindi volendo portarsi gli usi di che è parola sulla teorica delle volte, non rimaneva che guardarvele dalla banda della loro generazione geometrica. Per niente omettervi dunque e dare insieme un' applicazione di cotesti usi alle arti, io son venuto sopra di essa: e per parlarne definitivamente e a compimento non vi ho preso di mira che le volte semplici, le quali ne sono in genere le primordiali e le basi: onde riducendole col Rondolet a tre classi, cioè alla classe delle cilintriche a quella delle coniche e a quella delle sferiche sferoidi e conoidi; e considerando di essersi già anteriormente trattato in due diverse maniere la generazione di quelle di prima classe, mi son immediatamente portato sopra quelle delle ultime due classi. Intanto questa specie di generazione non è che un caso particolare di quella di un problema più generale, del movimento dico di una superficie qualunque obbligato a due direttrici a doppia curvatura. Io dunque per dare alla questione la maggiore ampiezza , son venuto risolvendo cotesto problema, che quindi ho particolarizzato non solo a' due propesti casi , ma ad altri pure di rimarchevole oggetto nell' arte di costruire. Per sostenere nella discussione l' unità di procedere, io ho legato questa soluzione all' istes-

so assunto argomento della significazione geometrica dei tre integrali in questione non mettendo in considerazione che le tre equazioni fondamentali della dottrina delle superficie inviluppanti che ne erano state percosiddire il primo prodotto. In effetto dopo averla portata in generale sulla conchiusione, mi son fatto ad applicarla al caso in cui la superficie mobile è un piano, applicazione che mi ha condotto alla generazione di una famiglia di superficie di un uso assai distinto nell' apparecchio e costruzione delle volte; alla famiglia cioè delle superficie sviluppabili. Qui producendo alcune considerazioni sulla natura di questa applicazione, e sulle proprietà di questa specie di generazione che seco conduce, son venuto ad una seconda; quella in cui il luogo generatore è una linea retta e che a confini più lati si estende, abbracciando oltre la detta famiglia delle sviluppabili delle altre ancora. Dunque discutendo in genere questo caso di applicazione, son venuto a conchiudere che per riuscire esso determinato abbisogna delle condizioni date alle quali venisse sottomesso. Il Monge venendo a considerare questa specie di generazione non ne ha parlato che sul fatto delle applicazioni, e non vi ha proceduto che sottomettendo da tutto principio il processo alle condizioni speciali del caso. In una maniera più elevota e all' ingrande si è condotta nelle nostre lezioni: si è discussa prima in generale la quistione; si è venuto quindi alle conchiusioni indeterminate che in genere essa comporta; e finalmente si sono

sottomesse queste conchiusioni non solo a' tre problemi da Monge discussi delle *scale a giorno*, delle porte o finestre centinate *ad occhio di vacca*, delle *volte maestre*, ma ancora a' due altri assai notevoli delle superficie sviluppabili in generale e delle superficie coniche in particolare.

Non restava a compimento dell' assunta generazione delle volte semplici che quella delle sferiche sferoidi e conoidi. Sotto di questo nome io non ho richiamato dapprima che le cosiddette volte a cupola, nelle quali la superficie introdosso, quella che la natura della volta caratterizza, non è che meramente di rivoluzione. Venendo dappoi però di proposito alla loro discussione, io le ho preso e considerato in tutta la generalità di cui sono capaci, e delle quali il caso prima richiamato non era che un caso particolare. Quindi considerando col Rondolet questa classe di superficie composte di ranghi orizzontali sovraposti gli uni agli altri, son venuto ad indurne e a trattarne la generazione come procedente dal movimento di nna curva chiusa e simetrica intorno al centro, strisciante con esso sopra un asse rettilineo, e decrescente secondo una certa legge segnata da curve che in quest' asse si incrocicchiano. Qui rimarcando i casi nei quali questo genere di movimento generava le tre specie di supesficie in discorso, ho fissato la discussione su due casi particolari, avente per luogo mobile un circolo o una ellisse: e dietro alcune considerazioni che ho condotto sempre sulle vedute dell' illustre maestro dell' ar-

te citato, io son venuto a prescicgliere nel fatto analitico per linee direttrici del movimento il circolo, l'ellisse e la catenaria, come le più confacenti al soggetto artistico che si dovea discutere nei suoi rapporti coll' alta geometria. Quindi facendo così di passaggio menzione del principio ragionato di analisi, che dappresso al Monge si è ordinariamente adottato per la generazione delle superficie mercè il movimento di linee rette e curve di forma costante o variabile; generazione già da me considerata come applicazione di un problema più generale e nella dipendenza della teorica delle superficie inviluppanti; facendo dico di questo principio menzione, son venuto a metter fine all' argomento in discussione sugli usi geometrici delle equazioni a differenziali parziali. Ma intanto le dottrine esposte sotto di questo argomento essendo assai variate e moltiplici, poteano farsi vedere disunite al leggitore e senza ordine: onde l' utilità presentavasi di richiamarle brevemente sottocchio. Quindi pria di portarmi sugli usi immediati dell' integrazione delle equazioni a variabili indipendenti, io mi son fatto con un sunto rapido e ragionato a mostrarne quali rami di un medesimo tronco, della significazione dico dei tre integrali di quelle equazioni, l' intimo legamento la connessione e l' unità della dottrina.

Il problema degl' isoperimetri è il soggetto fondamentale preso a discutere in terzo luogo nelle nostre lezioni. Questo problema famoso non solo per la sua difficoltà ed importanza, ma ancora per la clamorosissima disputa fra

i due fratelli Bernoulli, non è stato convenientemente risoluto che dal Lagrange col suo metodo delle variazioni. Si entra in questa risoluzione con una breve introduzione l'istoria raccontandosene. Quindi a mostrarsene l'oggetto si passa a cui mirava nella sua origine, e quello a cui in oggi si estende: l'essere analitico-geometrico se ne significa: e il doppio caso in cui può la sua soluzione incontrarsi se ne viene considerando. L'Eulero diede un bel teorema di cui abbisogna la completa discussione del soggetto nello stato attuale di conoscenze. Quindi era cosa naturale e convenevole il premetterne la dimostrazione: fatto ciò dunque; io son passato immediatamente dopo alla prima parte della soluzione, a quella cioè in cui si tratta di assegnare la relazione fra le coordinate di una curva tale che goda di una qualche proprietà di massimo o minimo: Or la curva cercata può essere o no dotata di qualche altra proprietà comune a tutte le altre curve fra le quali dee goderne quella del massimo o minimo: il primo caso si riduce mercè il predetto teorema al secondo, e perciò potrà condursene il trattamento sotto la condotta di un solo e medesimo processo. Per effettuarlo ho preso a risolvere il caso genuino del problema generale proposto in disfida da Giacomo Bernoulli al fratello Giovanni, cioè preso a determinare fra tutte le curve del medesimo perimetro quella che racchiude la massima o minima superficie. Questa soluzione mi ha dato per risultato l'equazione del cerchio, quindi sottomessa al criterio onde distinguere il massimo

dal minimo, mi ha dato il massimo in esclusione del minimo o viceversa secondo che la curva rivolta la sua concavità o convessità all' asse delle ascisse; e infine portata sino all'ultimo stadio colla determinazione delle costanti arbitrarie, ha conchiuso lasciando indeterminato il raggio del cerchio, e mostrando così l' indeterminazione del problema proposto. Un problema appartenente alla medesima analisi a due coordinate potea risolversi su i solidi di rivoluzione, cercandosi non fra tutte le curve isoperimetre quella della massima o minima area, ma quella che rotandosi intorno ad un asse verrebbe a generare il solido della massima o minima superficie. Io ho risoluto con un processo simile quest' altro problema, e ne ho avuto per la equazione della curva cercata quella della catenaria, la quale dà il massimo cercato voltando la concavità all' asse di rivoluzione e il minimo nel caso contrario. Dopo questa conchiusione io son passato alla seconda parte della soluzione del problema, a quella dico che ha per oggetto la ricerca della relazione fra le tre coordinate di una superficie godente di una qualche proprietà di massimo o minimo.

Le nostre conoscenze a questo riguardo sono assai limitate non solo in tutta la generalità ma ancora a riguardo del caso speciale che se ne è discusso sinoggi, quello cioè in cui il massimo o minimo cercato non lo fosse che fra tutte le superficie passanti pel perimetro di una medesima curva. L' Eulero non ha discusso questo caso che sotto la condizione che le dette superficie abbracciassero

uno stesso volume, discussione che egli ha pure lasciato senza conchiusione. In questo stato di conoscenze non ho fatto io che dare la soluzione di questo caso del problema considerandolo tanto sotto di cotesta condizione quanto da essa indipendente. Ma le formole a tal' uopo necessarie non si erano punto date nella discussione puramente analitica del terzo volume come per la prima parte della soluzione: dunque ho io incominciato dal calcolo di queste formole che per non estendermi senza bisogno nella generalità, ho ristretto al caso di tre variabili come l' assunto domandava: dopo son venuto applicandole alla soluzione de' due quesiti del problema, l' uno concernente le superficie curve, e l' altro le solidità che inviluppano: e il tutto ho conchiuso con un esempio tendente a mostrare l' uso delle costanti arbitrarie che far vi si potrebbe.

Dopo questa conchiusione si è passato al quarto proposto argomento, all' uso dell' integrazione delle equazioni a differenze nelle cose geometriche. Ognuno sa quanto sia ristretto l' attuale nostro sapere sul calcolo delle differenze, massimamente nei suoi rapporti colla geometria. Nei trattati di calcolo sublime i più classici eziandio, ho già rimarcato a suo luogo, non se ne tiene ordinariamente conto, o se ne parla così di passaggio e per incidenza. Frattanto per niente omettere di ciò che nell' attuale periodo avrebbe potuto contribuire a rendere completa l' istruzione delle lezioni, io non ho lasciato di farne parola con quella pochezza che la circostanza impera-

va. Mi sono dunque portato sulla considerazione delle equazioni binovariabili, e perciò sopra oggetti di geometria a due dimensioni, ove solo poteva venirsi interloquendo con ordine e aggiustatezza: ne ho condotto la breve discussione sempre diretta al generale e fondamentalmente. Infatti ho incominciato dalla esposizione ragionata dei principj generici onde questo calcolo procede nelle cose geometriche: la significazione relativamente a quelli del calcolo differenziale ne ho fatto vedere: la specie di continuità che gli è propria vi ho rimarcato: l'oggetto nella ricerca delle proprietà ed affezioni delle curve, e il doppio modo di procedervi nel ramo diretto ed inverso ne ho mostrato. Quindi l' esposte idee generali portando sull' ispezione del fatto geometrico, son venuto a raccoglierne che il calcolo di cui è parola relativamente alla geometria delle curve piane, non si riduce in sostanza che al problema diretto ed inverso della secante; il primo abbracciando il metodo delle tangenti, e il secondo la significazione geometrica dello integrale *sigma*; quello presentando l' uso delle differenze, e questo delle retrodifferenze. Ne ho discusso il primo; e l' ho applicato al caso dell' ellisse conica e dell' ellisse cassiniana. Son venuto quindi al secondo da un' equazione di primo ordine rappresentato a coefficiente variabile; e l' integrale dal precedente volume ne ho richiamato che in funzione vi si era dato di una facoltà: la significazione geometrica di questo integrale ho cercato; e il poligono rettilineo sotto una certa condizione ne

ho trovato: il caso ne ho portato sopra quello in cui la funzione facoltà non è che la *gamma* di Legendre; e questo stesso sopra un altro ancor più speciale ho piegato, nel quale il poligono diviene una retta all' asse delle ascisse parallela : dopo ciò a comprovare mi son fatto questa applicazione con un processo generale e diretto: cammin facendo la significazione analitico-geometrica vi ho mostrato delle funzioni arbitrarie completanti gl' integrali delle equazioni a differenze di primo ordine: e finalmente a metter termine son venuto alla discussione con una insigne applicazione del calcolo delle variazioni al problema dei poligoni isoperimetri; applicazione che con un' analisi ragionata e assai sottile sono arrivato a conchiudervi che fra tutti i poligoni del medesimo numero di lati e perimetro il regolare iscritto al circolo abbraccia la massima area.

Restava per compimento di tutto intero l' assunto delle lezioni il quinto ed ultimo uso geometrico delle equazioni a differenze-differenziali. Ma noi sappiamo quanto grande pur sia la povertà delle conoscenze in questo genere di applicaztoni. La teorica delle trajettorie reciproche è un pezzo assai marcato fra esse: Giovanni Bernoulli e l' Eulero ne hanno fatta la discussione, ma il loro dire tuttochè elegante ed ingegnoso non ha lasciato di essere indiretto e tale da farvi sentire il bisogno di ulteriori e nuovi sviluppi. Quindi dopo avere io mostrato nella stessa natura de' rapporti dell' alta analisi colla geometria l' indole di que-

sta specie di equazioni, ho conchiuso la lèzione e l'intero corso coll' enunciazione e dimostrazione di due teoremi che le riguardano, e che a vedere le danno nel fatto delle applicazioni.

Un' Appendice promessa fin dall' avvertimento del primo volume chiude questo quarto volume e tutta l' opera. Il suo oggetto non era che di riempire le lacune, alle quali la legge di brevità prescritta ad un corpo di lezioni dirette al pubblico sembrava obbligarmi. Intanto il dire laconico e preciso che mi sono studiato di condurvi, l' ordine il più naturale e diretto che ho procurato portare nella distribuzione ed esposizione delle materie; le ripetizioni delle quali mi sono colla maggior cura guardato; l' economia infine delle esemplificazioni, tale che senza mancare alla illustrazione di alcuna teorica fossi venuto evitandovi qualunque superfluità, ha fatto che io avessi potuto raccorre nel minimo volume il massimo di dottrine, e potuto ristringere la proposta Appendice a supplire la sola mancanza della dimostrazione del teorema di Taylor, fondamentale dell' intera scienza; del metodo generale delle condizioni d' integrabilità; e della conoscenza del metodo infinitesimale. Io l' ho fatto dunque dividendola in tre opuscoletti diretto ciascuno a contemplare e discutere distintamente ciascuna di queste tre teoriche.

Incominciando dal primo sono entrato in materia con un tratto istorico sul teorema concernente; a mostrarne l'oggetto; e a fissarne il principio analitico onde dipende. Quindi da

questo principio partendo, e gli algoritmi semplici ed elementari portando sulla natura algoritmica della questione, son venuto determinando la forma primordiale della formola che fondamentalmente la rappresenta; che per l' avanti supposta e non dimostrata avea portato il Wronski a vedere nella dimostrazione data del teorema da Lagrange e da quei che l'hanno seguito, il vizio di una petizione di principio; e che restava ulteriormente a determinarvi gli esponenti e i coefficienti. Son passato dunque a questa determinazione che ho eseguito dapprima a riguardo degli esponenti: e venuto dappoi a quella dei coefficienti vi ho condotto dalla mia banda un processo analitico, che fra gli altri vantaggi parmi che goda quello di rendere la determinazione indipendente dalla formola del binomio da cui si era finallora fatto dipendere. Risolute infine le difficoltà che si erano prodotte contro la generalità e il rigore della dimostrazione del teorema, ho posto termine alla discussione, raccogliendone l' essere l' oggetto e la significazione.

Data una funzione differenziale di un certo ordine trovare quali debbano essere le relazioni fra i suoi coefficienti onde sia una differenziale esatta: tale è la questione che si imprende a trattare nel secondo opuscolo. Si sa che l' Eulero fu il primo a discuterla; ma il suo metodo non è stato che indiretto, conducendolo sulla considerazione de' massimi e minimi; e le sue conchiusioni non si estendevano che al semplice caso dell' integrabilità di un solo ordine. Condorcet che è stato il pri-

mo a darne una soluzione diretta è generale, non ha detto a soddisfacenza , conchiudendo sulla proposizione inversa solamente. Lexell si è condotto dice Lagrange con tanta di complicazione che non saprebbe giudicarsi della sua giustezza e generalità. Lagrange poi ne ha dato nel suo calcolo delle funzioni una diretta completa e del tutto soddisfacente. In seguito il Poisson e non ha guari Sarus una ciascuno ne ha dato dalla sua parte, procedendo con vedute soddisfacenti e dirette. Finalmente il Bertrand ha una memoria prodotto sopra di questo argomento nel 1841, dandone due soluzioni; l' una in tutto dipendente dal calcolo delle variazioni, e l'altra sebbene ne sia indipendente sembra non presentare l' idea di una soluzione soddisfacente e diretta. Questi per quanto io ne sappia sono i progressi della questione in discussione. Nel nostro testo non si è proceduto che secondo le vedute del Lagrange ; e una teoria completa e ragionata se ne è data. Infatti dopo una breve introduzione si è venuto dividendo in due parti la discussione. Nella prima si è trattata come una specie di preliminare il caso delle funzioni lineari relativamente ad una sola delle variabili e suoi coefficienti differenziali: e nella seconda sulle conchiusioni poggiando della prima , il caso generale se ne è discusso delle funzioni di qualunque ordine e numero di variabili; discussione colla quale sono arrivato a rappresentare la serie delle equazioni di condizione in questione sotto l' espressione di una sola e medesima formola generale, dipendente dai sim-

boli della funzione data, dell' ordine di essa e dell' ordine della primitiva cercata. Un altro caso potea darsi per la completa e generale considerazione della questione, quello in cui la funzione non fosse data esplicitamente ma implicitamente. Io non ho mancato di trattare questo altro caso; ed ho conchiuso producendo due soli esempj relativi ai due casi delle funzioni esplicite ed implicite.

Il metodo infinitesimale è il soggetto del terzo ad ultimo opuscolo. Sappiamo che il principio fondamentale onde questo metodo dipende non è che del tutto metafisico e puramente razionale. Il suo inventore, Leibnizio, lo vide però sì chiaro e lo stimò sì evidente che senza punto impicciarsi a dimostrarlo lo produsse come una specie di assioma. Ma esso confondendo nel fatto la nozione di un approssimazione col rigore assoluto, venne in seguito attaccato e combattuto; ed andò sì innanzi il conflitto che i geometri più distinti del tempo giudicarono cosa utile un qualche altro sostituirvene che fosse meno metafisico e più dimostrato: donde il metodo dei limiti di Alembert; la teoria delle funzioni derivate di Lagrange. Ma ciò non ostante questo principio attesa la sua facilità e speditezza nel fatto delle applicazioni è tuttora l' istrumento analitico non solo onde si conducono le matematiche applicate e le pratiche, ma commendato eziandio sino nelle ricerche astratte in cui le difficoltà e la complicazione dei calcoli si trovano maggiori. Quindi il bisogno di conoscerne il meccanismo, epperò di tenerne conto nell' istruzione. A soddisfare que-

sto bisogno in supplemento delle lezioni, ove non si è seguito per delle ragioni in luogo prodotte che il principio rigoroso di Lagrange, è l'oggetto a cui questo opuscolo va diretto. Richiamando dunque presente l'essere di questo principio tanto in se stesso quanto in rapporto al calcolo differenziale, l'ho portato sul fatto algoritmico: e considerandolo nella genesi di questo calcolo conducendovi l'idea fondamentale d'infinitesimo combinata in fondo secondo il D'Alembert con quella di limite o nel suo essere puro e genuino, ne ho conchiuso le regole fondamentali della differenziazione; regole che sanzionate per così dire dai risultati di altri metodi esatti e rigorosi altronde conosciuti, sembrano punto non risentirsi del principio ipotetico e inesatto onde dipendono. Quindi venuto a considerarlo relativamente alle applicazioni, e l'influenza analitica nella soluzione dei problemi a contemplarne, sono arrivato ad una conchiusione che sembra potesse venire in sostegno dell'opinione da taluni adottata, onde rendere ragione della giustezza dei suoi risultati: opinione che attribuisce questa giustezza sperimentata soltanto di risultati, all'esclusione dal calcolo che per quel principio in maniera incognita si opera, di quei termini che punto non vi influiscono, e che fra loro distrugerebbonsi se conto se ne tenesse: opinione però come il Brunacci e il Francœur raccomandano, di cui non bisogna così alla cieca fidarsi. Un'altra opinione più sostenuta e imponente son venuto in seguito considerando: quella dico della *compen-*

sazione degli errori. Lagrange a questo proposito ha detto che la vera metafisica del calcolo infinitesimale consiste in ciò che l' errore della sua falsa ipotesi viene rettificato e compensato da quello che ne nasce dai processi stessi del calcolo, secondo i quali non si ritengono nella differenziazione che gl' infinitesimi del medesimo ordine. Ma questa proposizione, egli ha soggiunto, che riesce facile a contestarsi con degli esempj, sembra difficile di potersi dimostrare in generale. Il Brunacci ha quindi discusso questa proposizione, ed ha conchiuso annunziandone non solo la difficoltà come Lagrange di una dimostrazione *a priori*, ma soggiungendo ancora che per istituirla negli stessi casi particolari in maniera che il nostro spirito si accontenti, e quindi rendere rigoroso il metodo degl' infinitesimi, bisognerebbe chiamarvi in soccorso quegli stessi principj che basterebbero da se soli alla soluzione dei problemi. Il Carnot è venuto dappoi di proposito sopra di essa; e si è dato nelle sue *Riflessioni sulla metafisica del calcolo infinitesimale* a dimostrarla in generale. Ma la teoria della sua dimostrazione oltre di essere, per quanto sembrami, assai intricata astratta speculativa, si trova dipendere da una proposizione fondamentale supposta e non dimostrata; e perciò che niente in concreto vi conchiude di sodo, e che la difficoltà proposta dal Lagrange di una dimostrazione generale resti tutta ancora annodata e non risoluta. Io dopo avere richiamato la proposizione di Lagrange, e la discussione analitica che ne avea fatto il

Brunacci, son venuto fissandomi sulla dimostrazione generale che ha preteso darne il Carnot. Ne ho rapportato in ristretto la teoria con quel ordine e ragione di cui un dire così incerto e complicato è capace: vi ho fatto sentire il vizio della detta proposizione su della quale le conchiusioni si appoggiano: e son finito il debole rimarcando del suo essere.

Dopo ciò lasciando di più trattenermi sopra un argomento tanto sottile, e di mettere in esame le altre prodotte speculazioni onde appoggiare la veracità finale del principio, e confidenza indurne e sicurezza ne' risultati, ho conchiuso l' opuscolo osservando che la patente discrepanza di un errore senza dubbio commesso e ne' risultati non rinvenuto, forma di questo principio un mistero che non si è saputo nè si saprà forse mai comprendere; che gli analisti si sono nell' interpetrarlo divisi, essendovi chi vi vede esattezza e l' uso senza riserva ne vuole, chi ne teme in generale gli effetti e vi raccomanda cautela; che la disputa insorta fin dal suo nascere resta tuttora indecisa, e tuttogiorno sempre più si rinnova; che vano infine sarebbe aspettarne una dimostrazione regolare e diretta per definirla, e vani saranno forse per sempre gli sforzi ad assicurarne quell' uso che da taluni si vuole che non dovrebbesi ammettere, e da taluni altri che non dovrebbe abbandonarsi.

